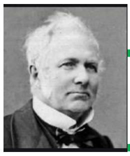
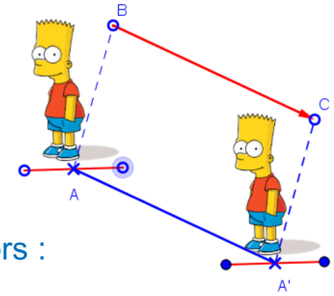
Vecteurs du plan.



« vecteur » vient du latin « vehere » (transporter). Le mot a été introduit en 1925 et la notation $\overrightarrow{AB}$ en 1920.
A l'origine des vecteurs, **Giusto Bellavitis (1803-1880)** qui les désignait comme segments équipollents

I. Notion de vecteurs.

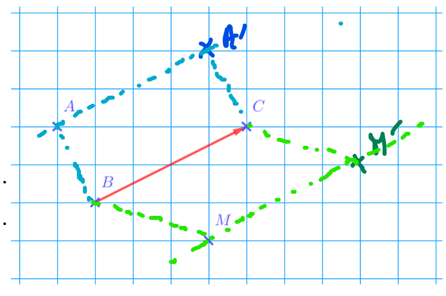
☺ Translation.



Définition : Soit B et C deux points distincts du plan.
L'image d'un point A, par la translation qui transforme B en C est le point A' tel que ABCA' soit un parallélogramme.

Remarque : Si A' est l'image de A par la translation qui transforme B en C alors :

- (AA') et (BC) sont parallèles
- le sens de A vers A' et de B vers C sont les mêmes
- les distances AA' et BC sont égales.



☑ *Savoir-faire : Savoir construire l'image d'un point par une translation :*

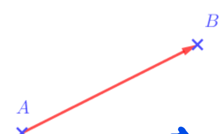
Soit t la translation qui transforme B en C. Construire l'image de A et M par t.

Cela revient à construire le 4e sommet d'un parallélogramme
(Attention au sens ...)

☺ Vecteurs.

Définition : Soit A et B deux points distincts du plan.
On appelle vecteur d'origine A et d'extrémité B, noté $\overrightarrow{AB}$, l'idée du déplacement de A vers B.
$\overrightarrow{AB}$ est défini par :

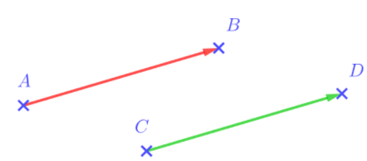
- Une direction (celle donnée par la droite (AB))
- Un sens (celui de A vers B).
- Une longueur (la longueur AB) appelée aussi la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$



Attention : Ne pas confondre la direction et le sens qui sont ici des notions différentes.
On ne peut comparer des sens que si les directions sont les mêmes

Remarque : La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

☺ Vecteurs égaux.



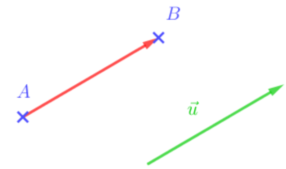
Définition : On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :
ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.

Propriété : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si
ABDC est un parallélogramme.

Remarque : pour un vecteur donné, on peut construire une infinité de vecteurs qui ont la même direction, le même sens et la même longueur.

☺ Notation $\vec{u}$ et représentant d'un vecteur.

Un vecteur est une idée de déplacement, ce n'est pas un ensemble de point donc on n' pas besoin de spécifier une origine et une extrémité.



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction, le même sens et la même longueur, donc ils sont égaux $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Définition : On dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$.

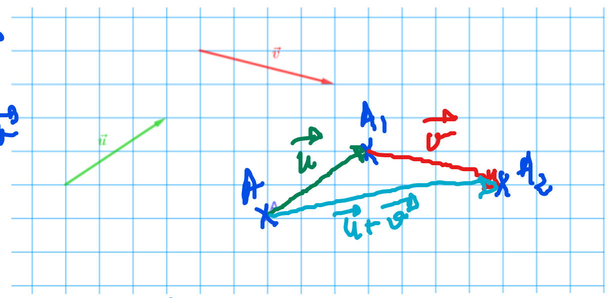
Remarque : Un vecteur $\vec{u}$ a une infinité de représentant, mais si on choisit un point A il existe un unique représentant de $\vec{u}$ qui a pour origine A.

II. Somme de deux vecteurs.

☺ Définition.

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Si on enchaine la translation de vecteur $\vec{u}$ puis la translation de vecteur $\vec{v}$ on obtient une translation. On appelle somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, le vecteur qui lui est associé.

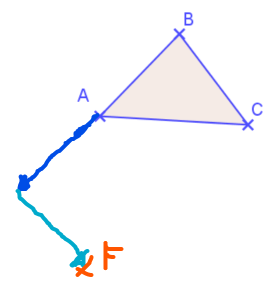
On construit A_1 l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.
$\overrightarrow{AA_1}$ est le représentant de $\vec{u}$ qui a pour origine A.
On construit A_2 l'image de A_1 par la translation de vecteur $\vec{v}$.
$\overrightarrow{A_1A_2}$ est le représentant de $\vec{v}$ qui a pour origine A_1.
$\overrightarrow{AA_2}$ est le représentant de $\vec{u}+\vec{v}$ qui a pour origine A.



☑ *Savoir-faire : Savoir construire un point défini à partir d'une somme de vecteurs :*

Soit un triangle ABC. Construire le point F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

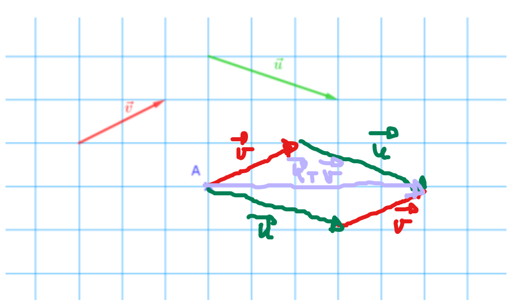
il est important pour ne pas se tromper de traduire en termes de déplacement : Si je pars de A pour arriver en F je dois faire le même déplacement que de B vers A puis le déplacement de B vers C

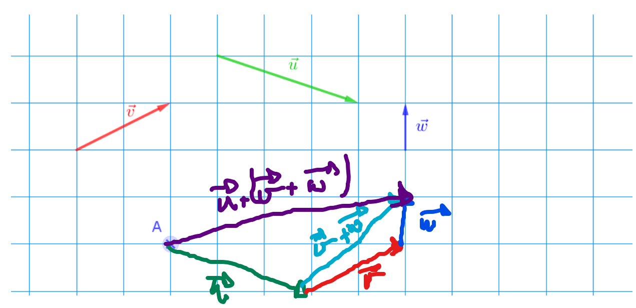


☺ Propriété.

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

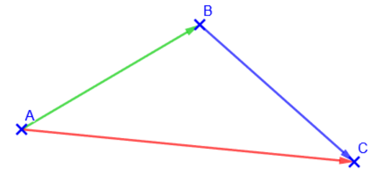
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ l'addition de vecteur est une opération commutative
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ l'addition de vecteur est une opération associative.





☺ La relation de Mr Chasles.

Soit A,B et C trois points. Effectuer la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ revient à effectuer la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$



Propriété : Relation de Mr Chasles.
Soit A,B et C trois points. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

☑ *Savoir-faire : Savoir appliquer la relation de Chasles :*

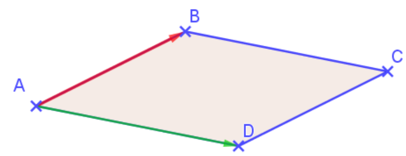
Simplifier les écritures : ♦ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$ ♦ $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$ ♦ $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$ $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP}$

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{NP}$

☺ Règle du parallélogramme.

Propriété :
Soit $ABCD$ un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$



☺ Le vecteur nul.

Soit A et B deux points. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$

$\overrightarrow{AA}$ a une longueur (0) mais pas de direction, ni de sens donc ce n'est pas un vecteur...
Par convention (pour que l'addition fonctionne) On appelle $\overrightarrow{AA}$ le vecteur nul et on le note $\vec{0}$

Remarque : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

III. Différence de deux vecteurs.

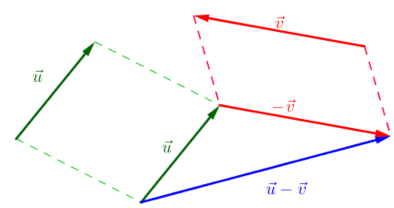
☺ Opposé d'un vecteur.

Définition : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés, s'ils ont :
la même direction, la même longueur mais sont de sens contraire.
On le note : $\vec{v} = -\vec{u}$

Remarque : L'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$ On écrit $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

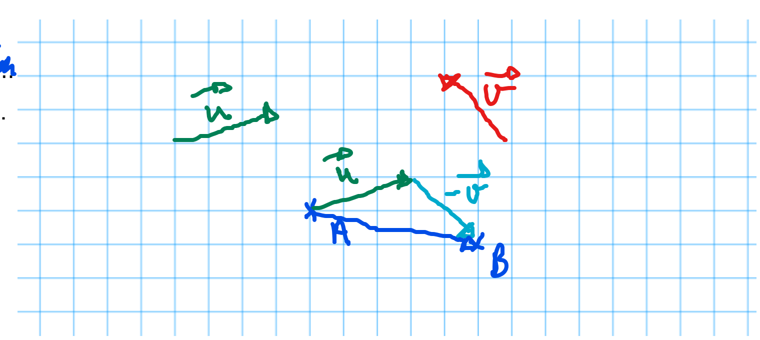
Propriété : Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

☺ Différence de deux vecteurs.

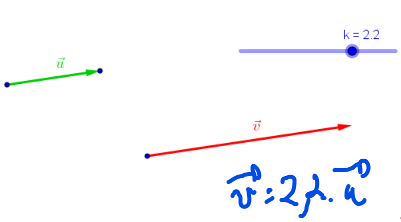


Définition : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

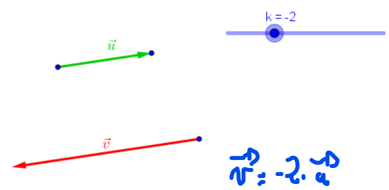
Remarque :
Cela nous permet de avoir une soustraction dans le monde des vecteurs à partir de l'addition des vecteurs.
« Soustraire revient à ajouter l'opposé »
le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{u} - \vec{v}$.



IV. Produit d'un vecteur par un nombre réel.



les vecteurs $\vec v$ et $\vec u$ ont
* la même direction
* le même sens
* la longueur de $\vec v$ est égale à 2,2 fois celle de $\vec u$



les vecteurs $\vec u$ et $\vec v$ ont
* la même direction
* des sens contraires
* la longueur de $\vec v$ est égale à 2 fois celle de $\vec u$

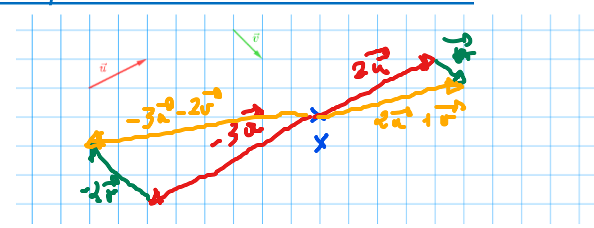
Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel. On note $k.\vec{u}$, le vecteur défini par :

- ♦ la même direction que $\vec u$
- ♦ le même sens que $\vec u$ si $k>0$ le sens contraire si $k<0$
- ♦ une longueur égale à $|k|$ fois la longueur de $\vec u$.

☑ *Savoir-faire : Savoir représenter un vecteur défini comme produit et somme de vecteur :*

Représente les vecteurs : ♦ $2\vec{u}+\vec{v}$ ♦ $3\vec{u}-2\vec{v}$

il suffit de construire les représentants petit à petit...



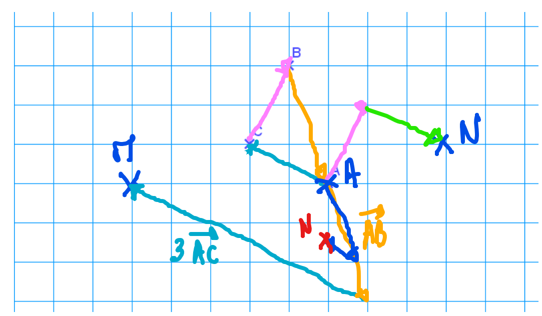
☑ *Savoir-faire : Savoir construire un point vérifiant une égalité vectorielle :*

Soit trois points A, B, C du plan.

Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$



V. Vecteurs colinéaires.

Définition : Deux vecteurs non nuls sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

♦ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ♦ Il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k.\vec{u}$.

Propriété :

- ♦ Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- ♦ Dire que les points A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.