Baccalauréat S Polynésie 12 juin 2015

EXERCICE 5 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. On appelle I la matrice identité d'ordre 2.
   Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme $\alpha A + \beta I$ où α et β sont des réels.
3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{lcl} r_{n+1} & = & r_n + s_n \\ s_{n+1} & = & 2r_n \end{array}\right.$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = r_n A + s_n I$.
4. Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1.
   En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de k_n en fonction de n.
5. On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par
   $t_n = r_n + \dfrac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2.
   En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de t_n en fonction de n.
6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.
7. En déduire alors, pour tout entier naturel n, une expression des coefficients de la matrice A^n.*