

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes. Les probabilités seront arrondies au millième.

Partie A

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. À chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,8.

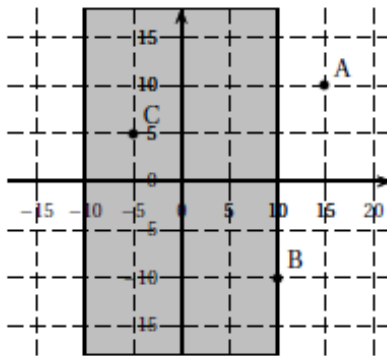
1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.
2. Combien de flèches le concurrent doit-il prévoir pour atteindre en moyenne la cible douze fois ?

Partie B

Entre deux phases du concours, pour se perfectionner, le concurrent travaille sa précision latérale sur une autre cible d'entraînement, représentée ci-contre. Pour cela, il tire des flèches pour essayer d'atteindre une bande verticale, de largeur 20 cm (en grisé sur la figure), le plus près possible de la ligne verticale centrale.

On munit le plan contenant la bande verticale d'un repère : la ligne centrale visée est l'axe des ordonnées.

On note X la variable aléatoire qui, à toute flèche tirée atteignant ce plan, associe l'abscisse de son point d'impact.



Ainsi, par exemple :

- si la flèche atteint le point A, le tireur a raté la bande, et X prend la valeur 15 ;
- si elle atteint le point B, l'impact est à la limite de la bande, et X prend la valeur 10 ;
- si elle atteint le point C, l'impact est dans la bande et X prend la valeur -5 .

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

1. Lorsque la flèche atteint le plan, déterminer la probabilité que son point d'impact soit situé hors de la bande grisée.
2. Comment modifier les bords de la bande grisée pour faire en sorte que, lorsque la flèche atteint le plan, son point d'impact soit situé à l'intérieur de la bande avec une probabilité égale à 0,6 ?

Partie C

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

1. Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne au moins pendant 2 000 heures ?

2. Restitution organisée des connaissances

Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ , est définie par : $E(T) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$.

- a. On considère la fonction F , définie pour tout réel t par : $F(t) = \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$.

Démontrer que la fonction F est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie pour tout réel t par : $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

- b. En déduire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

Quelle est l'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents ?*