

## EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni du repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On donne le nombre complexe  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre  $j$  et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

**Partie A : propriétés du nombre  $j$** 

1. a. Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

- b. Vérifier que le nombre complexe  $j$  est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe  $j$ , puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
- a.  $j^3 = 1$  ;
- b.  $j^2 = -1 - j$ .
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1,  $j$  et  $j^2$  dans le plan.  
Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

**Partie B**

Soit  $a, b, c$  trois nombres complexes vérifiant l'égalité  $a + jb + j^2c = 0$ .

On note A, B, C les images respectives des nombres  $a, b, c$  dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité :  $a - c = j(c - b)$ .
2. En déduire que  $AC = BC$ .
3. Démontrer l'égalité :  $a - b = j^2(b - c)$ .
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.\*