Baccalauréat S Asie 16 juin 2015

EXERCICE 4 5 points

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1+2+\ldots+n$.
Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car $10 = 1+2+3+4$.
Le but de ce problème est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier.

On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.
2. a. Montrer que le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2+n-2p^2 = 0$.

   b. En déduire que le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n+1)^2-8p^2 = 1$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne

$$x^2-8y^2 = 1,$$

où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solution de (E).
2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2. Déterminer la matrice A^{-1}, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.
3. Démontrer que $(x\,;\,y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x'\,;\,y')$ est solution de (E).
4. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. On admet que, ainsi définis, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de l'entier n.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

À l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2015 qui est le carré d'un entier.*