

## EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

*La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B*

## Partie A

On considère une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda > 0$ .

On rappelle que, pour tout réel  $a$  strictement positif,

$$P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de  $X$ , notée  $E(X)$ , et définie par

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt.$$

On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ .

1. Soit  $x$  un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \left( -\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1 \right).$$

2. En déduire que  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ .

## Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée  $X$  suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda > 0$ .

La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

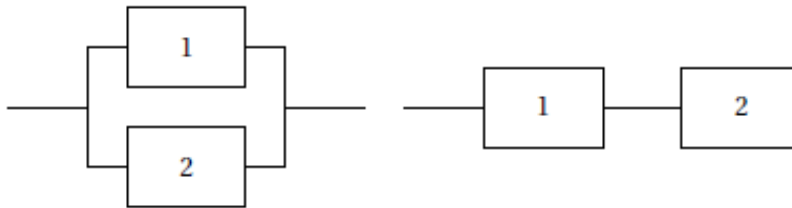
1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :
  - a. Représenter la probabilité  $P(X \leq 1)$ .
  - b. Indiquer où se lit directement la valeur de  $\lambda$ .
2. On suppose que  $E(X) = 2$ .
  - a. Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$  ?
  - b. Calculer la valeur de  $\lambda$ .

### Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note  $D_1$  l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note  $D_2$  l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux évènements  $D_1$  et  $D_2$  sont indépendants et que  $P(D_1) = P(D_2) = 0,39$ .

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A

Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.\*