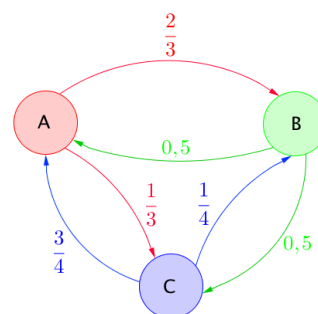


IV. Graphes probabilistes.

a) Définition.

Dans une équipe de football, on étudie les passes que se font trois attaquants A, B et C. Les probabilités qu'un attaquant passe le ballon à un autre sont schématisées sur le graphe orienté et pondéré suivant. Chaque passe de ballon correspond à une nouvelle expérience aléatoire dont les issues sont A, B ou C (un des trois attaquants est susceptible de recevoir le ballon). Par exemple, la probabilité que l'attaquant A passe le ballon à l'attaquant B est égale à



Les poids des arcs sont alors des probabilités. Un tel schéma est appelé un graphe probabiliste.

Définition

Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré possédant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égal à 1.

Par exemple, la somme des poids issus de A est égal à

b) Matrice de transition.

Définition

Soit G un graphe probabiliste d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n . La matrice de transition de G est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j est la probabilité portée par l'arc reliant le sommet i vers le sommet j s'il existe et 0 dans le cas contraire.

Dans l'exemple, la matrice de transition est : $M = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

On trouve par exemple à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne la probabilité que le ballon arrive chez l'attaquant B alors qu'il se trouvait chez l'attaquant A.

Remarques :

- Le coefficient a_{11} de la matrice M est nul car la probabilité que l'attaquant A garde le ballon est nulle. Il en est de même pour les coefficients a_{22} et a_{33} .
- La somme des coefficients d'une même ligne d'une matrice de transition est égale à 1.

c) Etat probabiliste.

Définition

L'état probabiliste après n étapes est la matrice ligne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après n étapes.

Dans l'exemple des passeurs au football, si à l'étape 0, c'est l'attaquant A qui a le ballon, alors l'état initial s'écrit P_0 (). L'état probabiliste après une étape est donc .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....