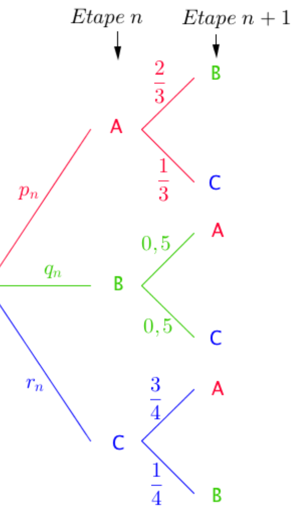
On note $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste après n étapes. L'arbre de probabilité ci-contre permet de résumer les probabilités de l'étape n à l'étape n+1. A l'aide de la formule des probabilités totales, on a :

……………………………………………………………………………………………………

On vérifie alors que : $P_{n+1} = P_n \times M$.



Propriété

On considère un graphe probabiliste de matrice de transition M et dont l'état probabiliste après n étape est P_n . Pour tout entier naturel n, on a :

$P_{n+1} = P_n \times M$ et $P_n = P_0 \times M^n$ où P_0 est l'état initial.

Dans l'exemple précédent, calcule $P_0 \times M^3$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

a) Etat stable.

Définition

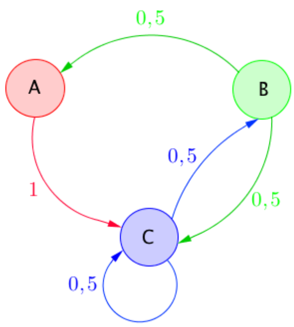
Un état probabiliste est dit stable lorsqu'il n'évolue pas lors de répétitions de l'expérience.

Propriété

Soit un graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de 0. L'état stable P vérifie alors l'égalité $P = P \times M$. Et si n tend vers l'infini, alors l'état probabiliste P_n tend vers l'état stable P.

Exemple :

On considère le graphe probabiliste ci-contre : Vérifions que l'état stable est la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.



……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

☑ *BAC ES – Amérique du nord –2013.*

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.

On considère que :
- Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,9.
- Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,8.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le n-ième jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le n-ième jour.
On a donc : $a_n + b_n = 1$.

Le 1er jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1 = 0$.

1. a. Traduire les données par un graphe probabiliste.
   b. Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.
   c. Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0,1 a_n + 0,8$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n n = a_n - \frac{8}{9}$.
   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
   b. Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.
4. a. Déterminer en justifiant la limite de (a_n).
   b. Interpréter ce résultat.

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………