Arithmétique.

I. La division euclidienne.

a) Introduction.

20 pirates découvrent un trésor composé de 238 pièces d'or. Ils décident de les partager équitablement.

- Si ils en prennent 5 chacun, il en reste 138 $238 = 20 \times 5 + 100$
- Si ils en prennent 10 chacun, il en reste 38 $238 = 20 \times 10 + 38$
- Si ils en prennent 11 chacun, il en reste 18 $238 = 20 \times 11 + 18$
- Si ils en prennent 12 chacun, Il n'y en aura pas assez

Le maximum de pièces qu'ils peuvent prendre chacun est 11 pièces, car dans ce cas, le reste 18 est plus petit que le nombre de pirates. On dit que l'égalité $238 = 20 \times 11 + 18$ est la division euclidienne de 238 par 20, car le quotient est le plus grand possible, ou car le reste est plus petit que ~~le quotient~~

b) Définition.

Définition

Effectuer la division euclidienne de deux nombres entiers D et d, c'est trouver deux nombres entiers un quotient Q et un reste R qui vérifient l'égalité $D = d \times q + r$ avec $r < d$

Traduction mathématique

$D = d \times q + r$ avec $r < d$

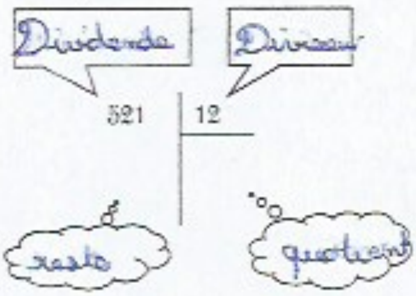
Dire $0 \leq r < d$

Revient à dire q est le plus grand possible

II. Technique de la division euclidienne.

Il est parfois plus rapide de poser une division euclidienne plutôt que de chercher la bonne égalité.

Exemple : trouve le quotient et le reste dans la division euclidienne de 521 par 12.



Etape n°1: On cherche le nombre de chiffre du quotient

☺ le plus petit nombre à 2 chiffres est 10

$12 \times 10 = 120 < 521$

Donc il y a au moins 2 chiffres au quotient.

☺ le plus petit nombre à 3 chiffres est 100

$12 \times 100 = 1200 > 521$

Donc il y a 2 chiffres au quotient

Etape n°2: On cherche le chiffre des dizaines du quotient

Dans 52 dizaines il rentre au maximum 4 fois 12, et

4 dizaines × 12 = 48 dizaines.

= 480 unités.

Etape n°3: On cherche le chiffre des unités du quotient

Dans 41 unités il rentre 3 fois 12, et 3 unités × 12 = 36 unités.

On vérifie que le diviseur est bien plus grand que le reste

Une division euclidienne est une égalité donc on pense à l'écrire. $521 = 12 \times 43 + 05$

III. Divisibilité.

a) Définition.

Définition

Lorsque dans la division euclidienne d'un nombre a par un nombre b le reste est égal à zéro.. On dit alors que le nombre b divise le nombre a. On dit aussi que b est un diviseur de a ou que a est un multiple de b.

Remarque : l'égalité de la division euclidienne est alors D = q × d

Exemple : 12 = 4×3 ; 12 = 6×2 ; 12 = 12×1

Tous les diviseurs de 12 sont (1) ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; (12)

Tous les multiples de 12 sont 12 ; 24 ; 36 ; etc

b) Critères de divisibilité.

Un nombre est divisible par 2 lorsque il est paire (son chiffre des unités est 0;2;4;6;8)

Un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffre est un multiple de 3

Un nombre est divisible par 4 lorsque ses deux derniers chiffres forment un nombre multiple de 4

Un nombre est divisible par 5 lorsque il termine par 0 ou 5

Un nombre est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 9

Un nombre est divisible par 10 lorsque son chiffre des unités est 0

Exemples : 2157 est un multiple de 3 car 1+2+5+7 = 15

21 573 est un multiple de 9 car 2+1+5+7+3 = 18

2036 est un multiple de 4 car 36 en multiple de 4

IV. Nombres premiers.

Liste des diviseurs de 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Liste des diviseurs de 17 : 17, 1

17 n'a que 2 diviseurs, 1 et 17, on dit que c'est un nombre premier

Définition

On appelle nombre premier un nombre qui n'a que 2 diviseurs, un et lui-même

Exemples : 19 : 1, 19

3 : 1, 3

7 : 1, 7

Les nombres premiers plus petits que 100 :

le crible d'Ératosthène

En éliminant tous les multiples des nombres rencontrés, il ne reste que des nombres premiers.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

V. Décomposition en facteurs premiers.

Propriété (admise)

Tout nombre entier peut se décomposer de manière unique sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Exemples :

☺ $180 = 2\times 90 = 2\times 2\times 45 = 2\times 2\times 3\times 15 = 2\times 2\times 3\times 3\times 5 = 2^2\times 3^2\times 5$

☺ $1400 = 14\times 100 = 2\times 7\times 2\times 5\times 10 = 2\times 7\times 2\times 5\times 2\times 5 = 2^3\times 5^2\times 7$

Application à la simplification de fraction :

☺ $\frac{1400}{180} = \frac{2^3\times 5^2\times 7}{2^2\times 3^2\times 5} = \frac{2\times 5\times 7}{3^2} = \frac{70}{9}$

Définition

On dit qu'une fraction est irréductible si elle est réduite au maximum.

Exemple : Rends la fraction $\frac{280}{448}$ irréductible.

$\frac{280}{448} = \frac{2\times 140}{2\times 224} = \frac{2\times 2\times 5\times 2\times 7}{2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 7} = \frac{5}{8}$

VI. Plus grand commun diviseur.

a) Nombres premiers entre eux.

Liste des diviseurs de 24 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24. Liste des diviseurs de 35 : 1 ; 5 ; 7 ; 35.

Liste des diviseurs communs de 24 et de 35 : 1. Plus grand diviseur commun de 24 et de 35 : 1.

Définition

On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsqu'ils n'ont qu'un diviseur commun : 1.

On peut dire aussi : leur PGCD est 1.

Remarque : ne pas confondre :

☺ Un nombre premier : un nombre qui n'a que deux diviseurs, 1 et lui-même

☺ Deux nombres premiers entre eux : deux nombres qui n'ont qu'un seul diviseur entre eux.

b) Calcul du PGCD.

Définition

On appelle PGCD de deux nombres a et b, le plus grand diviseur commun de a et b. On le note PGCD (a;b).

Exercice de référence

1. La fraction $A = \frac{322}{1078}$ est-elle irréductible ?
2. Déterminer le PGCD de 1078 et de 322, en déduire l'écriture irréductible de A.

1) Non. $A = \frac{322}{1078} = \frac{2\times 161}{2\times 539} = \frac{7\times 46}{7\times 154} = \frac{7\times 2\times 23}{7\times 2\times 77} = \frac{23}{77}$

2 est un diviseur commun de 322 et 1078 on peut donc simplifier la fraction.

$322 = 2\times 7\times 23$

$1078 = 2\times 7\times 7\times 11$

PGCD (322 ; 1078) = 14.

$A = \frac{322}{1078} = \frac{14\times 23}{14\times 77} = \frac{23}{77}$