

Correction du bac blanc N°1

Exercice I : QCM. (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Le prix d'un article subit une première augmentation de 20 % puis une seconde augmentation de 30 %. Le prix de l'article a augmenté globalement de :

a. 25 %

b. 50 %

c. **56 %**

Le coefficient d'augmentation correspondant aux deux évolutions successives est égal à $1,2 \times 1,3 = 1,56$. Donc l'article a augmenté globalement de 56%.

2) Soient A et B deux évènements tels que $p(A) = 0,2$, $p(B) = 0,3$ et $p(A \cap B) = 0,1$; alors

a. **$p(A \cup B) = 0,4$**

b. $p(A \cup B) = 0,5$

c. $p(A \cup B) = 0,6$

$$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,2 + 0,3 - 0,1 = 0,4$$

3) Dans un magasin, un bac contient des cahiers soldés. On sait que 50% des cahiers ont une reliure spirale et que 75% des cahiers sont à grands carreaux. Parmi les cahiers à grands carreaux, 40% ont une reliure spirale.

Adèle choisit au hasard un cahier à reliure spirale. La probabilité qu'il soit à grands carreaux est :

Réponse A : 0,3

Réponse B : 0,5

Réponse C : 0,6

Réponse D : 0,75

Soit C l'évènement « le cahier est à grand carreaux » et S l'évènement « le cahier a une reliure spirale ». Alors

$$P_S(C) = \frac{P(C \cap S)}{p(S)} = \frac{P(C) \times P_C(S)}{p(S)} = \frac{0,75 \times 0,4}{0,5} = 0,6$$

Dans les questions 4 et 5, on suppose que dans ce magasin, un autre bac contient une grande quantité de stylos-feutres en promotion. On sait que 25% de ces stylos-feutres sont verts. Albert prélève au hasard et de manière indépendante 3 stylos-feutres.

4) La probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'il prenne au moins un stylo-feutre vert est égale à :

Réponse A : 0,250

Réponse B : 0,422

Réponse C : 0,578

Réponse D : 0,984

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de stylos-feutres vert pris. Le prélèvement se fait au hasard et de manière indépendante. La grande quantité de stylos-feutres permet de considérer que chaque tirage est identique et indépendant, donc X suit la loi binômiale $B(3; 0,25)$. Donc $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,75^3 = 0,578125$

5) La probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'il prenne exactement 2 stylos-feutres verts est égale à :

Réponse A : 0,047

Réponse B : 0,063

Réponse C : 0,141

Réponse D : 0,500

En considérant la même variable que précédemment :

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \times 0,25^2 \times 0,75^1 = 0,140625$$

6) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+1}{e^x - 1}$. La fonction f est définie sur :

a. $]-\infty; +\infty[$

b. **$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$**

c. $]-1; +\infty[$

La fonction f est définie pour tout x n'annulant pas son dénominateur. Cherchons les valeurs qui annulent son dénominateur. On pose $(E) : e^x - 1 = 0$. Alors $(E) \leftrightarrow e^x = 1$ donc $S(E) = \{0\}$.
Donc $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

7) Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 est :

a. $y = x + 1$

b. $y = ex$

c. $y = e^x$

En appliquant la formule de l'équation de la tangente à une courbe $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$ à la fonction exp avec $a = 0$. On trouve $y = e^0 \times (x - 0) + e^0$. Car $(e^x)' = e^x$, donc on trouve $y = x + 1$.

8) Une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$ est définie par :

a. $F(x) = \frac{1}{2} e^{-2x}$

b. $F(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

c. $F(x) = -2e^{-2x}$

Si $F(x) = \frac{1}{2} e^{-2x}$ alors $F'(x) = \frac{1}{2} \times (-2) \times e^{-2x}$ donc $F'(x) = -e^{-2x}$. Donc F n'est pas une primitive de f .
Si $F(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$ alors $F'(x) = -\frac{1}{2} \times (-2) \times e^{-2x}$ donc $F'(x) = e^{-2x}$. Donc F est une primitive de f .
Si $F(x) = -2e^{-2x}$ alors $F'(x) = -2 \times (-2) \times e^{-2x}$ donc $F'(x) = 4e^{-2x}$. Donc F n'est pas une primitive de f .

Exercice II : Suites. (5 points)

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement.

En 2013, il y avait 40 mille abonnés à cette revue. Depuis cette date, on a remarqué que chaque année 85 % des abonnés renouvellent leur abonnement et 12 mille nouvelles personnes souscrivent un abonnement. On note a_n le nombre d'adhérents en milliers pour l'année 2013+ n . On a donc $a_0 = 40$.

Partie A.

1) Justifier que pour tout entier naturel n , on a $a_{n+1} = 0,85 a_n + 12$ pour tout entier naturel n .

Soit a_n le nombre d'adhérents en milliers pour l'année 2013+ n , l'année suivante 85 % des abonnés renouvellent leur abonnement, donc il y aura $0,85 a_n$ abonnés et 12 mille nouvelles personnes souscrivent un abonnement donc $a_{n+1} = 0,85 a_n + 12$.

2) Déterminer le nombre d'abonnés en 2015.

$a_0 = 40$.

$a_1 = 0,85 a_0 + 12 = 0,85 \times 40 + 12 = 46$.

$a_2 = 0,85 a_1 + 12 = 0,85 \times 46 + 12 = 51,1$.

Donc il y aura 51 100 abonnés en 2015.

3) On considère l'algorithme suivant :

Variables : n et S sont des entiers naturels
 A est un réel.
 Entrée : Demander à l'utilisateur la valeur de S
 Initialisation : Affecter à n la valeur 0
 Affecter à A la valeur 40
 Traitement : Tant que $A < S$:
 Affecter à n la valeur $n+1$
 Affecter à A la valeur $0,85 \times A + 12$
 Fin Tant que
 Sortie : Afficher n

Lorsque l'utilisateur entre la valeur $S = 70$, l'affichage en sortie est $n = 9$. Interpréter ce résultat.

Cet algorithme affiche l'indice du plus petit terme de la suite (a_n) plus grand que S . Lorsque l'utilisateur entre la valeur $S = 70$, l'affichage en sortie est $n = 9$. Cela signifie que le nombre d'abonnés dépassera 70 000 en l'année 2013 + 9 donc en 2022.

Partie B.

1) On considère la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 80$ pour tout entier naturel n .

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$$u_{n+1} = a_{n+1} - 80 = 0,85 a_n + 12 - 80 = 0,85 a_n - 68 = 0,85 \times (a_n - 80) = 0,85 \times u_n.$$

Donc pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = 0,85 \times u_n$.

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,85

et de premier terme $u_0 = a_0 - 80 = 40 - 80 = -40$.

b) Exprimer u_n en fonction de n .

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $u_0 = -40$.

Donc pour tout nombre entier naturel n , $u_n = -40 \times 0,85^n$.

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_n = 80 - 40 \times 0,85^n$.

Pour tout nombre entier naturel n , $u_n = a_n - 80$ donc $a_n = u_n + 80$ donc $a_n = 80 - 40 \times 0,85^n$.

3) Déterminer le nombre d'abonnés en 2018.

Le nombre d'abonnés en 2018 correspond à a_5 .

$$a_5 = 80 - 40 \times 0,85^5 \approx 62,252.$$

Donc il y aura environ 62 252 abonnés en 2018.

4) Déterminer la limite de la suite a_n .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0 \text{ car } 0 < 0,85. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -40 \times 0,85^n = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 80 - 40 \times 0,85^n = 80$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 80.$$

Partie C.

1) Le directeur de cette revue peut-il envisager de la diffuser à 100 mille exemplaires ?

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (80 - 40 \times 0,85^{n+1}) - (80 - 40 \times 0,85^n) = -40 \times 0,85^{n+1} + 40 \times 0,85^n \\ &= 40 \times 0,85^n \times (-0,85 + 1) = 40 \times 0,85^n \times 0,15 > 0. \end{aligned}$$

Donc la suite (a_n) est croissante et sa limite est 80, donc elle n'atteindra pas 100.

Non, le directeur de la revue ne peut pas envisager d'avoir 100 000 abonnés.

2) Déterminer en expliquant la méthode utilisée, à partir de qu'elle année le directeur de cette revue peut-il envisager de la diffuser à 75 mille exemplaires.

En utilisant l'algorithme de la question 3 de la partie A, en entrant $S = 75$, on trouve est $n = 13$.

Cela signifie que le nombre d'abonnés dépassera 75 000 en l'année 2013 + 13 donc en 2026.

Exercice III : Probabilités (5 points)

Un restaurateur propose trois formules à midi.

Formule A : Plat du jour/Dessert/Café

Formule B : Entrée/Plat du jour/Dessert/Café

Formule C : Entrée/Plat du jour/Fromage/Dessert/Café

Lorsqu'un client se présente au restaurant pour le repas de midi, il doit choisir une des trois formules proposées et commander ou non du vin.

Le restaurateur a constaté qu'un client sur cinq choisit la formule A, tandis qu'un client sur deux choisit la formule B. On sait aussi que :

— Parmi les clients qui choisissent la formule A, une personne sur quatre commande du vin.

— Parmi les clients qui choisissent la formule B, deux personnes sur cinq commandent du vin.

— Parmi les clients qui choisissent la formule C, deux personnes sur trois commandent du vin.

Un client se présente au restaurant pour le repas du midi. On considère les événements suivants :

A : « Le client choisit la formule A »

B : « Le client choisit la formule B »

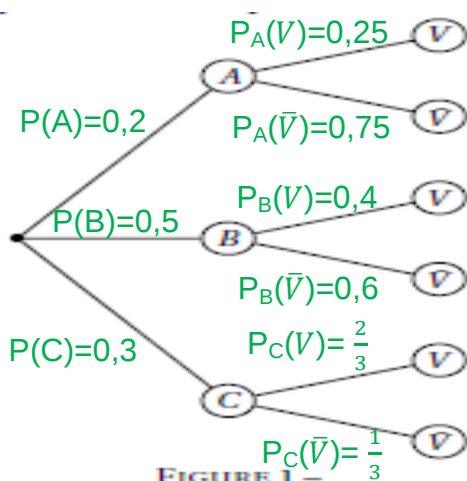
C : « Le client choisit la formule C »

V : « Le client commande du vin »

1) Calculer $p(C)$.

$$p(C) = 1 - (p(A) + p(B)) = 1 - (0,2 + 0,5) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

2) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités donné par la figure 1.



3) Montrer que $p(V) = 0,45$.

Les événements A, B et C constituent une partition de l'univers donc, d'après la loi des probabilités totales : $p(V) = p(A \cap V) + p(B \cap V) + p(C \cap V)$.

Donc $p(V) = p(A) \times p_A(V) + p(B) \times p_B(V) + p(C) \times p_C(V)$

Donc $p(V) = 0,2 \times 0,25 + 0,5 \times 0,4 + 0,3 \times \frac{2}{3}$

Donc $p(V) = 0,45$.

4) Le client commande du vin. Calculer la probabilité qu'il ait choisi la formule A.

$$p_V(A) = \frac{p(A \cap V)}{p(V)} = \frac{p(A) \times p_A(V)}{p(V)} = \frac{0,2 \times 0,25}{0,45} \approx 0,11$$

5) La formule A coûte 8 euros, la formule B coûte 12 euros et la formule C coûte 15 euros. Le vin est en supplément et coûte 3 euros. On note D la dépense en euro d'un client venant manger le midi au restaurant.

a) Déterminer la loi de probabilité de D.

La loi de probabilité de D est donc

$D_i =$	8	12	15	11	15	18
$P(D = D_i)$	0,15	0,3	0,1	0,05	0,2	0,2

b) Calculer la dépense moyenne par client en euro.

L'espérance de la variable aléatoire D est donc :

$$E(D) = 8 \times 0,15 + 12 \times 0,3 + 15 \times 0,1 + 11 \times 0,05 + 15 \times 0,2 + 18 \times 0,2.$$

Donc $E(D) = 13,45$.

Cela signifie qu'on peut espérer qu'un client dépense en moyenne 13,45 €.

c) De combien doit-il augmenter le vin pour que la dépense moyenne augmente de 5% ?

On souhaite que l'espérance soit $E(D) = 1,05 \times 13,45 = 14,1225$.

Soit x le prix du vin. On a alors :

$$E(D) = 8 \times 0,15 + 12 \times 0,3 + 15 \times 0,1 + (8 + x) \times 0,05 + (12 + x) \times 0,2 + (15 + x) \times 0,2.$$

Soit $E(D) = 12,1 + 0,45x$.

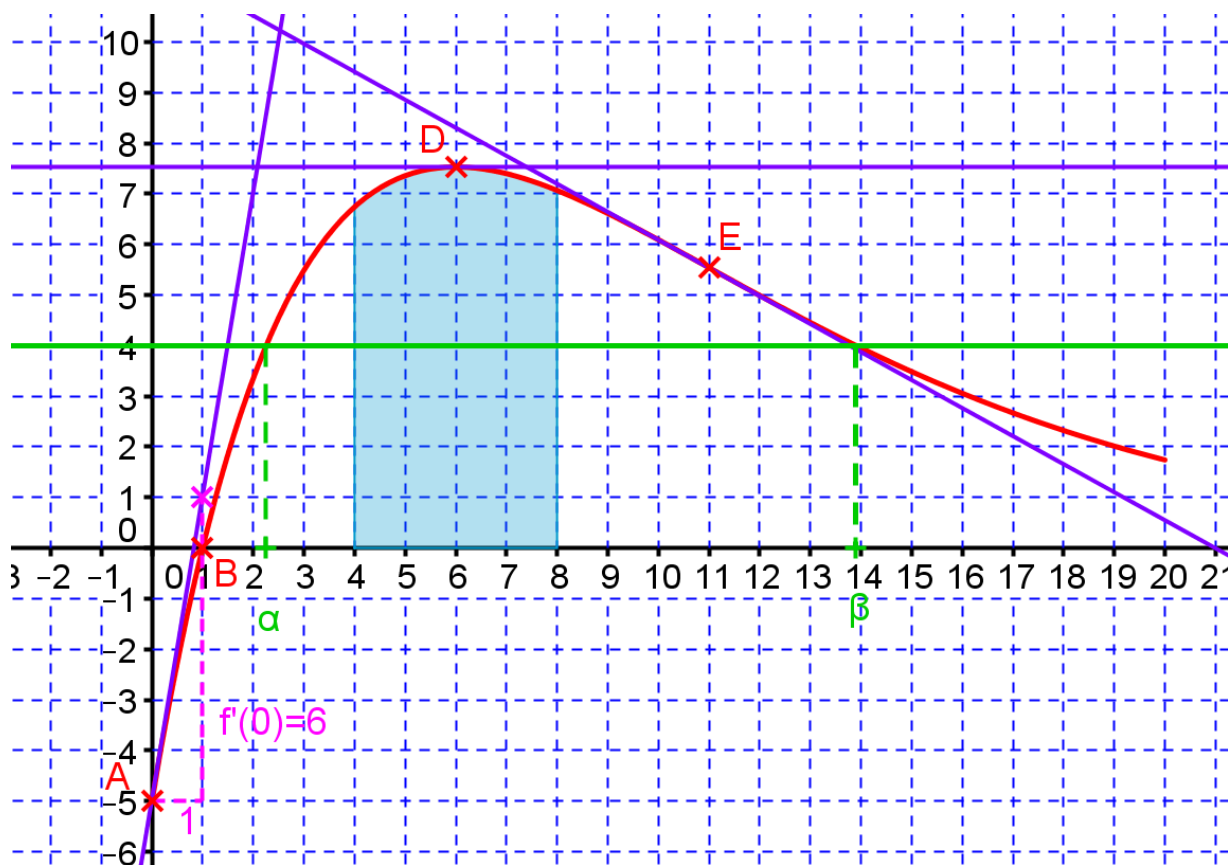
On cherche donc x tel que $12,1 + 0,45x = 14,1225$. Soit $x \approx 4,49$

Ce qui correspond à une augmentation de $\frac{4,49 - 3}{3} \approx 49,8\%$.

Exercice IV : Etude de fonction. (6 points)

Partie A.

On a représenté en annexe, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 20]$. On a tracé les tangentes à la courbe C aux points A , D et E d'abscisses respectives 0 ; 6 et 11.



1) Donner les valeurs exactes de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(6)$.

$f(0)$ est l'ordonnée du point de C_f ayant pour abscisse 0, $f(0) = -5$.

$f(1)$ est l'ordonnée du point de C_f ayant pour abscisse 1, $f(1) = 0$.

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point qui a pour abscisse 0 donc $f'(0) = 6$.

$f'(6)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point qui a pour abscisse 6 donc $f'(6) = 0$.

2) Indiquer si la courbe C semble admettre un point d'inflexion. Si oui, préciser ce point.

La courbe semble concave sur $[0 ; 11]$ et convexe sur $[11 ; 20]$, elle semble donc admettre un point d'inflexion en E qui a pour abscisse 11.

Remarque : On peut dire aussi que les tangentes à la courbe la traverse en E .

3) Déterminer un encadrement par deux nombres entiers de $I = \int_4^8 f(x)dx$. (représenter sur l'annexe la surface à considérer.

$I = \int_4^8 f(x)dx$ correspond à l'aire (en unité d'aire) de la surface délimitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites qui ont pour équation $x=4$ et $x=8$. Graphiquement, on obtient : $28 \text{ u a} < I < 32 \text{ u a}$.

4) Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$. (Préciser un encadrement à l'unité).

Les solutions de l'équation $f(x) = 4$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f et de la droite qui a pour équation $y = 4$. Il y a deux points d'intersection, donc l'équation $f(x)=4$ admet deux solutions : $2 < x_1 < 3$ et $13 < x_2 < 14$.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par $f(x) = (5x - 5)e^{-0,2x}$.

1) Montrer que $f'(x) = (-x + 6)e^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0 ; 20]$.

$$f(x) = (5x - 5)e^{-0,2x} \quad \text{donc } f = u \times v \text{ avec } u(x) = 5x - 5 \text{ et } v(x) = e^{-0,2x}.$$

$$\text{donc } f' = u' \times v + u \times v' \text{ avec } u'(x) = 5 \text{ et } v'(x) = -0,2e^{-0,2x}$$

$$\text{donc } f'(x) = 5 \times e^{-0,2x} + (5x - 5) \times (-0,2) \times e^{-0,2x}$$

$$\text{donc } f'(x) = 5e^{-0,2x} - xe^{-0,2x} + e^{-0,2x}$$

$$\text{donc } f'(x) = (-x + 6)e^{-0,2x}$$

Remarque : on vérifie la cohérence avec les premières questions : $f'(0) = 6$ et $f'(6) = 0$.

2) a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 20]$.

$e^{-0,2x} > 0$ pour tout x , donc $f'(x)$ est du même signe que $(-x + 6)$.

Donc $f'(x)$ est positif sur $[0 ; 6]$ et $f'(x)$ est négatif sur $[6 ; 20]$

b. Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 20]$. On fera apparaître les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(6)$.

x	0	6	20
Signes de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

$$f(0) = (5 \times 0 - 5)e^{-0,2 \times 0} = -5 \times 1 = -5$$

$$f(6) = (5 \times 6 - 5)e^{-0,2 \times 6} = 25 e^{-1,2} \approx 7,53$$

$$f(20) = (5 \times 20 - 5)e^{-0,2 \times 20} = 95 e^{-4} \approx 1,74$$

3) Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α sur $[0 ; 6]$. Donner la valeur arrondie au millièm de α .

$f(0) = -5$ et $f(6) = 25 e^{-1,2} \approx 7,53$ donc $4 \in [f(0); f(6)]$. De plus f est strictement croissante et continue sur $[0 ; 6]$, donc d'après le théorème des valeurs l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α appartenant à $[0 ; 6]$. Avec la calculatrice,

X	Y1
2.1	3.6137
2.2	3.8642
2.3	4.1033
2.4	4.3314

X	Y1
2.254	3.9947
2.255	3.9971
2.256	3.9995
2.257	4.0018

on trouve $2,256 < \alpha < 2,257$.

4) a. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = (-25x - 100)e^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $[0 ; 20]$.

$$F(x) = (-25x - 100)e^{-0,2x} \quad \text{donc } F = u \times v \text{ avec } u(x) = (-25x - 100) \text{ et } v(x) = e^{-0,2x}.$$

$$\text{donc } F' = u' \times v + u \times v' \text{ avec } u'(x) = -25 \text{ et } v'(x) = -0,2e^{-0,2x}$$

$$\text{donc } F'(x) = -25 \times e^{-0,2x} + (-25x - 100) \times (-0,2) \times e^{-0,2x}$$

$$\text{donc } F'(x) = -25e^{-0,2x} + 5xe^{-0,2x} + 20e^{-0,2x}$$

$$\text{donc } F'(x) = (5x - 5)e^{-0,2x} = f(x)$$

donc F est une primitive de f sur $[0 ; 20]$.

b. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[4 ; 8]$. Donner sa valeur exacte.

La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[4 ; 8]$ est :

$$m = \frac{1}{8-4} \times \int_4^8 f(x)dx = \frac{1}{4} \times \int_4^8 f(x)dx = \frac{1}{4} \times [F(x)]_4^8 = \frac{1}{4} \times [(-25x - 100)e^{-0,2x}]_4^8$$

$$\text{Donc } m = \frac{1}{4} \times [(-25 \times 8 - 100)e^{-0,2 \times 8} - (-25 \times 4 - 100)e^{-0,2 \times 4}]$$

$$\text{Donc } m = \frac{1}{4} \times [(-300)e^{-1,6} - (-200)e^{-0,8}]$$

$$\text{Donc } m = \frac{1}{4} \times [-300e^{-1,6} + 200e^{-0,8}]$$

$$\text{Donc } m = -75e^{-1,6} + 50e^{-0,8}$$

Remarque : on vérifie la cohérence avec la question 3 de la partie A :

$$\int_4^8 f(x)dx = -300e^{-1,6} + 200e^{-0,8} \approx 29,3 \text{ ce qui est cohérent avec } 28 \text{ u a} < I < 32 \text{ u a.}$$

Partie C

Une entreprise fabrique x centaines d'objets où x appartient à $[0 ; 20]$. La fonction f des parties A et B modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros, en supposant que toute la production est vendue.

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats précédents, et en admettant que l'équation $f(x) = 4$ admet une autre solution β sur $[6 ; 20]$ dont la valeur arrondie au millièm est 13,903.

1. Quelle doit être la production de l'entreprise pour réaliser un bénéfice d'au moins 4000 € ? (Arrondir à l'unité).

x	0	α	6	β	20
Variations de f			$25e^{-1,2}$		
	-5	↗ 4		↘ 4	$95e^{-4}$

En utilisant le tableau de variations de f , on voit que f est supérieur à 4 pour tout x appartenant à $[\alpha ; \beta]$.

Donc pour réaliser un bénéfice d'au moins 4000 € l'entreprise doit produire entre 225 et 1390 objets.

2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 400 et 800 objets.

Déterminer alors la valeur moyenne du bénéfice. (On donnera le résultat arrondi à l'euro près).

La valeur moyenne du bénéfice pour une production entre 400 et 800 objets est $m = \frac{1}{8-4} \times \int_4^8 f(x)dx$.

On a vu que $m = -75e^{-1,6} + 50e^{-0,8} \approx 7,324209356262$.

Donc si l'entreprise produit entre 400 et 800 objets, la valeur moyenne du bénéfice sera de 7 324 €.