24 Janvier 2019

Bac Blanc n° 1

MATHEMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'usage de la calculatrice est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Nature de l'épreuve : écrite
Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 sur 4 à 4 sur 4.
Le candidat doit traiter les cinq exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice I : Baccalauréat S Liban 2018 / 4 points

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^e partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.
3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,25	0,437 5	0,390 6	0,402 3	0,399 4	0,400 1	0,399 9

Quelle conjecture peut-on émettre?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
   c. La suite (p_n) converge-t-elle? Interpréter ce résultat.

Exercice II : Baccalauréat S Métropole septembre 2018 / 4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique le centimètre.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(z^2 - 2z + 4\right)\left(z^2 + 4\right) = 0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_\mathrm{A} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_\mathrm{B} = 2\mathrm{i}$.
   a. Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   b. Faire une figure et placer les points A et B.
   c. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.
3. On note F le point d'affixe $z_\mathrm{F} = z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B}$.
   a. Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.
   b. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$ puis de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$.
   c. Calculer le module de z_F et en déduire l'écriture de z_F sous forme trigonométrique.
   d. En déduire la valeur exacte de : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
4. Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent pour l'une :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

et pour l'autre :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ces résultats sont-ils contradictoires? Justifier la réponse.

Exercice III : Baccalauréat S Métropole septembre 2018 / 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Soit a un réel positif.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour $a = 2,9$ puis pour $a = 3,1$.
2. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
   a. En remarquant que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$, montrer que $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$.
   b. Montrer que les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3.
3. Dans cette question, on prend $a = 2,9$.
   a. Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   c. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Dans cette question, on prend $a = 3,1$ et on admet que la suite (u_n) est croissante.
   a. À l'aide des questions précédentes montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
   b. En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
   c. L'algorithme suivant calcule le plus petit rang p pour lequel $u_p > 10^6$.
   Recopier et compléter cet algorithme.
   P est un nombre entier et U est un nombre réel.

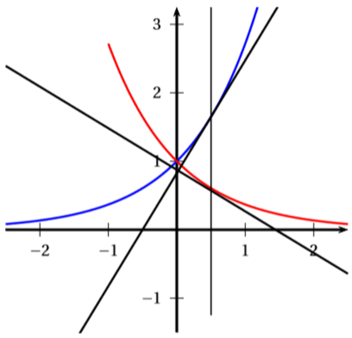
```
P ← 0
U ......

Tant que ...
    P ← ......
    U ← ......
Fin Tant que
```

Exercice IV : Baccalauréat S Antilles/Guyane 2017 / 3 points

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_g$ celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.
Pour tout réel a, on note M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et N le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a.
La tangente en M à $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en Q.
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment $[PQ]$ pour chacune de ces valeurs de a.



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	−3	2
3	−2,5	2
4	−2	2
5	−1,5	2
6	−1	2
7	−0,5	2
8	0	2
9	0,5	2
10	1	2
11	1,5	2
12	2	2
13	2,5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Démontrer que la tangente en M à $\mathscr{C}_f$ est perpendiculaire à la tangente en N à $\mathscr{C}_g$.
2. **a.** Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?
   b. Démontrer cette conjecture.

Exercice IV : Baccalauréat S Centres étrangers 2018 / 4 points

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel.
Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.
Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.
À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0;20]$ par :

$$f(t) = (0,8t + 0,2)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03.$$

On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;20]$.
Ainsi, la valeur $f(0) = 0,23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
f	0,23	↗		↘	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
   a. Calculer $f(20)$.
   b. Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.
2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
   a. Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.
   b. On considère l'algorithme suivant :

   $t \leftarrow 1,75$
   $p \leftarrow 0,1$
   $V \leftarrow 0,7$
   Tant que $V > 0,035$
   $\quad t \leftarrow t + p$
   $\quad V \leftarrow (0,8t + 0,2)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03$
   Fin Tant que

   Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme?
   Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice?
3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.
   a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0;11]$ par :

   $$F(t) = (-1,6t - 3,6)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03t.$$

   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;11]$.
   b. En déduire le taux moyen V_m, valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;11]$. Arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %.