30 Janvier 2020

Bac Blanc n° 1

MATHEMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'usage de la calculatrice est autorisé *selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.*

Nature de l'épreuve : écrite
Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 sur 4 à 4 sur 4.
Et une *annexe* à rendre avec la copie.
Le candidat doit traiter les quatres exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice I : Bac Liban 31mai 2019 / 5 points

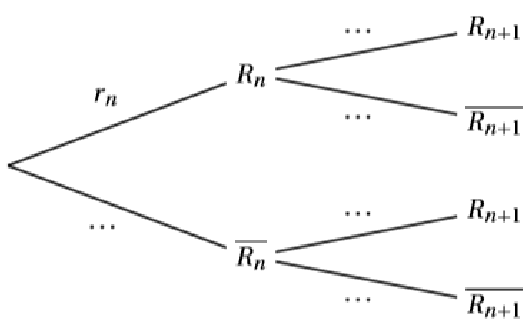
Les deux parties 1 et 2 sont indépendantes.

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.
On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1. **a.** Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2.
   b. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.
   c. Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.
   d. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine?
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p(R_n)$.
   a. Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



   b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75 r_n + 0,2$.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.
   d. Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice II : Bac Centres étrangers–Pondichéry 13 juin2019 / 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixes 1, z^2 et $\dfrac{1}{z}$ soient alignés. Sur le graphique fourni en annexe, le point A a pour affixe 1.

Partie A : étude d'exemples

1. **Un premier exemple**
   Dans cette question, on pose $z = \text{i}$.
   a. Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\dfrac{1}{z}$.
   b. Placer les points N_1 d'affixe z^2, et P_1 d'affixe $\dfrac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
   On remarque que dans ce cas les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.
2. **Une équation**
   Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + z + 1 = 0$.
3. **Un deuxième exemple**
   Dans cette question, on pose : $z = -\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   a. Déterminer la forme exponentielle de z, puis celles des nombres complexes z^2 et $\dfrac{1}{z}$.
   b. Placer les points N_2 d'affixe z^2 et P_2, d'affixe $\dfrac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
   On remarque que dans, ce cas les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B

Soit z un nombre complexe non nul.
On note N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

1. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :
$$z^2 - \frac{1}{z} = \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$
2. On rappelle que si, $\overrightarrow{U}$ est un vecteur non nul et $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{U}}$ et $z_{\overrightarrow{V}}$, les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $z_{\overrightarrow{V}} = kz_{\overrightarrow{U}}$.
   En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.
3. On pose $z = x + \text{i}y$, où x et y désignent des nombres réels.
   Justifier que : $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + \text{i}(2xy + y)$.
4. **a.** Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.
   b. Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

Exercice III : Bac Amérique du sud Novembre 2019 / 5 points

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par : $\begin{cases} u_{n+1} &= 3 - \dfrac{10}{u_n + 4} \\ u_0 &= 5 \end{cases}$

Partie A :

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et de u_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
3. Démontrer que, pour tout entier nature n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4}$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
5. Justifier que la suite (u_n) converge.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C :

On considère l'algorithme ci-contre.

1. Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n?
2. À l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

$u \leftarrow 5$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u \geqslant 1{,}01$
$\quad n \leftarrow n + 1$
$\quad u \leftarrow 3 - \dfrac{10}{u+4}$
Fin du Tant que

Exercice IV : Bac Amérique du sud Novembre 2019 / 5 points

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à 2,5 μg/mL.
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3te^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geqslant 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. a. Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?

   b. Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.

   c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Vérifier que pour tout nombre réel t positif,
   $$f'(t) = \frac{3}{4}(4 - t)e^{-\frac{1}{4}t}.$$
3. a. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).

   b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal?
   Quel est alors ce taux? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. a. Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0; 4]$ telle que $f(t_0) = 2{,}5$.
   En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

   On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4\,;\,+\infty[$ vérifiant $f(t_1) = 2{,}5$.
   On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1 \approx 18{,}930$.

   b. Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 μg/mL dans le sang.
5. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = -12(t+4)e^{-\frac{1}{4}t} + 2t$.

   a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f et en déduire une valeur approchée de $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$ à l'unité près.

   b. En déduire une valeur approchée à 0,1 près du taux moyen de vasopressine, lors d'un accident hémorragique durant la période où ce taux est supérieur à 2,5 μg/mL.

Annexe à rendre avec la copie :

NOM :