11 Avril 2019

Bac Blanc n° 2

MATHEMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'usage de la calculatrice est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Nature de l'épreuve : écrite
Durée de l'épreuve : 4 heures

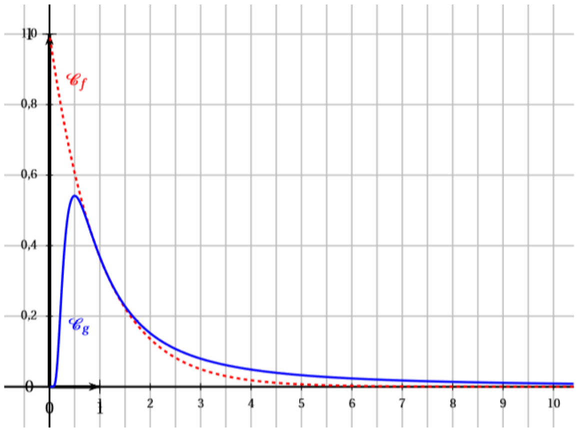
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 sur 4 à 4 sur 4.
Le candidat doit traiter les cinq exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Soient f et g les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

On admet que f et g sont dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$. On note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

Les représentations graphiques de f et g dans un repère orthogonal, nommées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous :



Partie A – Conjectures graphiques

Dans chacune des questions de cette partie, aucune explication n'est demandée.

1. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $g'(x) = 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B – Étude de la fonction g

1. Calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. On admet que la fonction g est strictement positive sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \ln\big(g(x)\big)$.
   a. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $h(x) = \dfrac{-1-2x\ln x}{x}$.
   b. Calculer la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0.
   c. En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0.
3. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}(1-2x)}{x^4}$.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C – Aire des deux domaines compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

1. Démontrer que la point A de coordonnées $\left(1\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right)$ est un point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   On admet que ce point est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ et en dessous sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Démontrer que
$$\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}-\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{b}}.$$
3. Démontrer que $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1 \big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x = 1-2\mathrm{e}^{-1}$.
4. On admet que
$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$
   Interpréter graphiquement cette égalité.

Exercice II : Baccalauréat S Nouvelle Calédonie mars 2019 / 2 points

Une société de location de voitures s'intéresse à l'état mécanique de son parc automobile afin d'anticiper les frais d'entretien.
On dispose des données suivantes :

- 20 % des voitures sont sous garantie ;
- pour 1 % des voitures sous garantie, une réparation est nécessaire ;
- pour 10 % de celles qui ne sont plus sous garantie, une réparation est nécessaire.

On choisit une voiture au hasard dans le parc et on considère les évènements suivants :

- G : « la voiture est sous garantie » ;
- R : « une réparation est nécessaire ».

1. **a.** Traduire la situation par un arbre pondéré.
   b. Calculer la probabilité que la voiture choisie soit sous garantie et nécessite une réparation.
   c. Justifier que $P(R) = 0{,}082$.
   d. Il s'avère que la voiture choisie nécessite une réparation.
   Quelle est la probabilité qu'elle soit sous garantie ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.
2. La société de location fait appel à un garage pour l'entretien de son parc automobile.
   L'entretien consiste en une révision à laquelle s'ajoutent d'éventuelles réparations. Les conditions commerciales du garage sont les suivantes :
   - si la voiture est encore sous garantie, l'entretien est gratuit ;
   - si la voiture n'est plus sous garantie, l'entretien est facturé de la manière suivante : la révision coûte 100 € et, si une réparation est nécessaire, il faut rajouter 400 €.

   Sachant que son parc automobile compte 2 500 voitures, est-il raisonnable pour la société de location de prévoir un budget annuel de 250 000 euros pour l'entretien de l'ensemble des voitures ?
   On pourra introduire la variable aléatoire X qui représente le coût d'entretien d'une voiture.

Exercice III : Baccalauréat S Nouvelle Calédonie novembre 2018 / 4 points

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante : $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

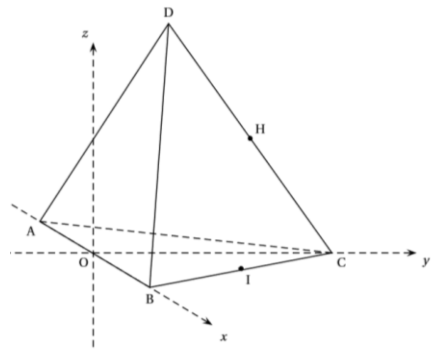
$$z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n.
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - \mathrm{i}$ et on note B_n le point d'affixe u_n.
On note C le point d'affixe i.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n(1-\mathrm{i})$.
3. **a.** Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n.
   b. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|z_n - \mathrm{i}\right| = 0$.
4. **a.** Soit n un entier naturel. déterminer un argument de u_n.
   b. Démontrer que, lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels, les points B_n sont alignés.
   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite d'équation réduite : $y = -x + 1$.

Exercice IV : Baccalauréat S Asie 2018 / 4 points

On se place dans un repère orthonormé d'origine O et d'axes (Ox), (Oy) et (Oz).
Dans ce repère, on donne les points $A(-3\,;\,0\,;\,0)$, $B(3;0;0)$, $C\left(0\,;\,3\sqrt{3}\,;\,0\right)$ et $D\left(0\,;\,\sqrt{3}\,;\,2\sqrt{6}\right)$.
On note H le milieu du segment [CD] et I le milieu du segment [BC].



1. Calculer les longueurs AB et AD.

On admet pour la suite que toutes les arêtes du solide ABCD ont la même longueur, c'est-à-dire que le tétraèdre ABCD est un tétraèdre régulier.

On appelle $\mathscr{P}$ le plan de vecteur normal $\overrightarrow{OH}$ et passant par le point I.

2. Étude de la section du tétraèdre ABCD par le plan $\mathscr{P}$
   a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2y\sqrt{3}+z\sqrt{6}-9=0$.
   b. Démontrer que le milieu J de [BD] est le point d'intersection de la droite (BD) et du plan $\mathscr{P}$.
   c. Donner une représentation paramétrique de la droite (AD), puis démontrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AD) sont sécants en un point K dont on déterminera les coordonnées.
   d. Démontrer que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.
   e. Déterminer précisément la nature de la section du tétraèdre ABCD par le plan $\mathscr{P}$.
3. Peut-on placer un point M sur l'arête [BD] tel que le triangle OIM soit rectangle en M ?

Exercice V : Baccalauréat S Antilles/Guyane 2018 / 4 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=\mathrm{e}\times\sqrt{u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$1\leqslant u_n\leqslant \mathrm{e}^2.$$

2. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   b. En déduire la convergence de la suite (u_n).
3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n=\ln(u_n)-2.$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_n=-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

   c. En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
   d. Calculer la limite de la suite (u_n).
4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0.
   Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

   Affirmation 1 : « Si $u_0=2018$, alors la suite (u_n) est croissante. »
   Affirmation 2 : « Si $u_0=2$, alors pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_n\leqslant \mathrm{e}^2$. »
   Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0=0$. »