Généralités sur les suites.

I. Définition :

*Voici un problème posé en 1202 par **Leonardo Pisano** dit **Fibonacci**.*

Un fermier achète un couple de bébés lapins. Après 2 mois, ce couple commence à se reproduire et donne naissance à un nouveau couple de lapins qui au bout de deux mois, se reproduira à son tour. Chaque couple donnant naissance à un nouveau couple tous les mois, lesquels commencent à se reproduire au bout de deux mois.

Nombre de mois	Bébés	ados	adultes	total
0	1	0	0	1

On crée ainsi une suite de nombres :
{......,......,......,......,......,......,......,......,..........…........
On indexe chacun des nombres de la liste. On Note u_0 le nombre de lapins le premier mois, u_1 celui le deuxième mois, etc… On a donc

…………………………………………………..………………..

…………………………………………………..………………..

On note (u_n) l'ensemble des nombres de cette suite de nombres. On dit que u_5 est le ....
…………..……..…………………………………………….……..
Attention u_1 n'est pas …………………………………..…….
…………..……..…………………………………………….……..

Définition

Une <u>suite numérique</u> (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n. Le nombre u_n est appelé le <u>terme de rang n</u> de cette suite (ou d'indice n).

Attention, ne pas confondre (u_n) *qui est*...
et u_n *qui est*...

II. Deux différents modes de création d'une suite :

☺ Suites définies en fonction de n.

☑ *Savoir faire : Savoir calculer un terme d'une suite définie en fonction de n :*

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 2n^2 + 3$.
Calcule u_0 , u_1 , u_2 , u_5 , u_{100}

....
....
....

Exprime en fonction de n : u_{n+1} , u_{2n} , u_{2n-1} , $2u_n+1$, $-u_{n+1}+3$.

....
....
....
....

☺ Suites définies par récurrence.

☑ *Savoir faire : Savoir calculer un terme d'une suite définie par récurrence :*

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\,u_0 + 5$.

Calcule u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_{100}

....

....

....

Contrairement à une suite définie par une formule explicite, on ne peut pas connaitre u_{100} sans connaître ....
Cependant il est possible d'écrire un algorithme sur une calculatrice programmable.

☑ *Savoir faire : Savoir écrire un algorithme pour calculer un terme d'une suite définie par récurrence :*

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\,u_0 + 5$.Calcule u_{100}

Sur TI :

```
PROGRAM : SUITE
: Input "N=?",N
:    →Y
: For(I,0,N-1)
:          →Y
: End
: Disp Y
```

```
PrgmSUITE
N=?100

        Fait
```

Sur Casio :

```
======SUITE======
?→N↵
  →Y↵
For 0→I To N-1↵
         →Y↵
Next↵
Y◢
```

```
 ?
 100

   -Disp-
```

Remarque : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Calcule les cinq premiers termes de cette suite.

....

....

....

Remarque : On considère la suite (v_n) définie par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n$.

....

....

....

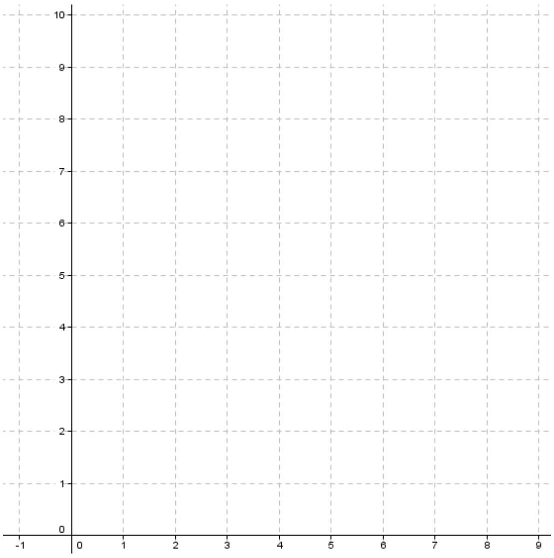
III. Représentation graphique d'une suite :

Définition

Dans un repère du plan, on représente une suite (u_n) par le nuage de points de coordonnées (n ; u_n).

☑ *Savoir faire : Savoir représenter graphiquement une suite numérique :*

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 3n + 1$. Représenter la suite (u_n).



	A	B
1	n	Un=n²-3n+2
2	0	
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	
13		

IV. Sens de variation d'une suite numérique.

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 3n + 1$. En observant sa représentation graphique, on remarque que u_0…… u_1 ; u_1…… u_2 ; u_2…… u_3 ; u_3…… u_4.
On a l'impression que pour n /…… On a toujours u_{n+1}…… u_n. Peut-on le prouver ?

………
………
………

Définition

Soit une suite numérique (u_n).
- On dit que la suite (u_n) est <u>croissante</u> si pour tout entier n, on a u_{n+1}…… u_n.
- On dit que la suite (u_n) est <u>décroissante</u> si pour tout entier n, on a u_{n+1}…… u_n.

………
………

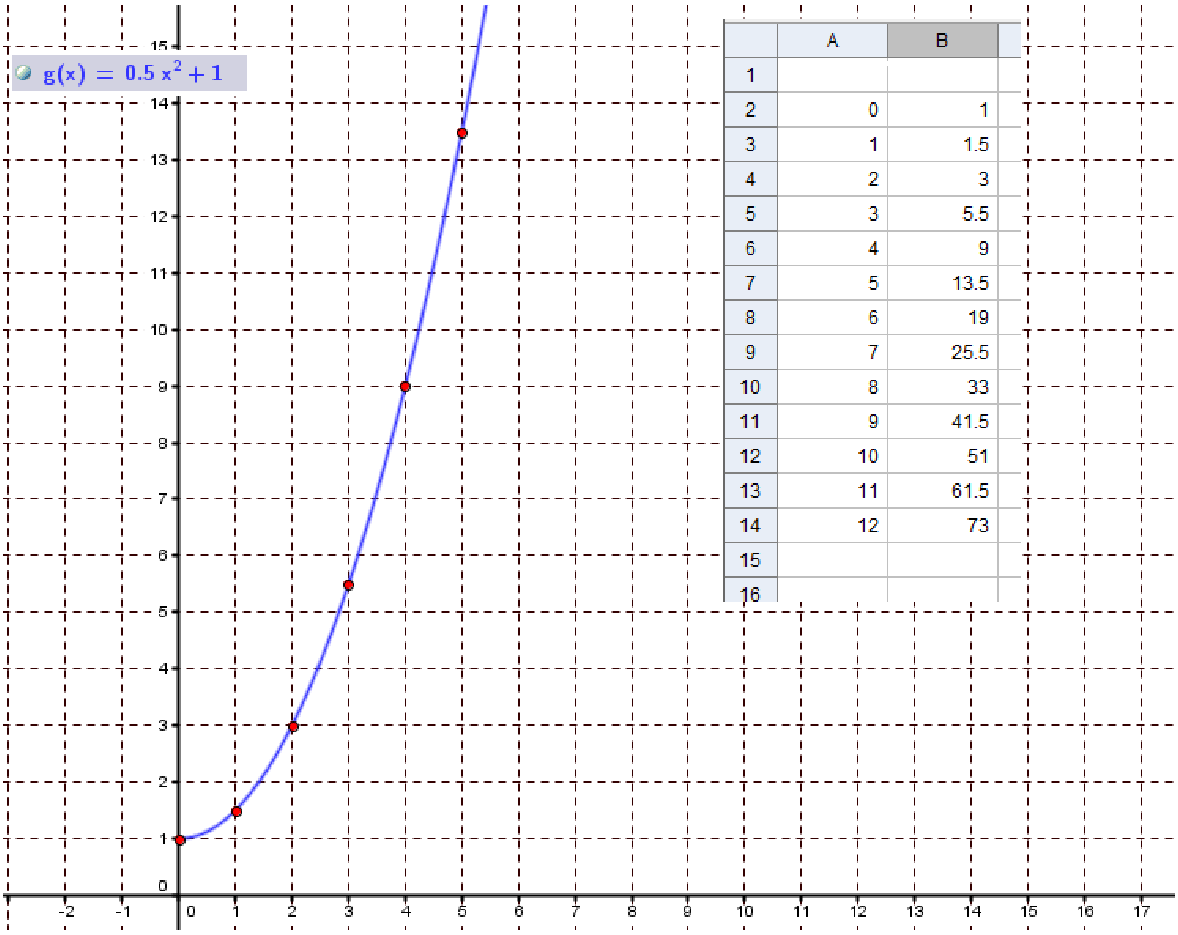
☑ *<u>Savoir faire : Savoir étudier les variations d'une suite :</u>*

Prouver que la suite (u_n) définie par : pour tout entier n, on a $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est décroissante.

………
………
………
………

Propriété

Soit une fonction f définie sur [0 ; +∞ [et une suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. Alors
- Si la fonction f est croissante sur [0 ; +∞ [alors la suite (u_n) est croissante.
- Si la fonction f est décroissante sur [0 ; +∞ [alors la suite (u_n) est décroissante.



	A	B
1		
2	0	1
3	1	1.5
4	2	3
5	3	5.5
6	4	9
7	5	13.5
8	6	19
9	7	25.5
10	8	33
11	9	41.5
12	10	51
13	11	61.5
14	12	73
15		
16		

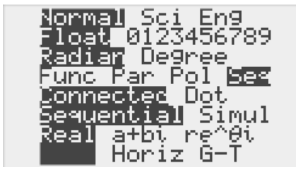
IV. Suites et calculatrice :

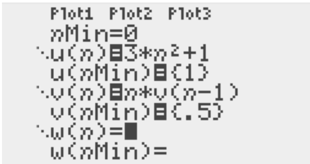
☑ *Savoir faire : Savoir comparer deux suites avec une calculatrice :*

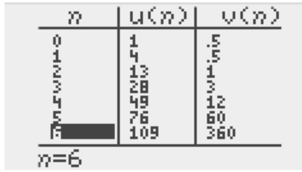
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 3n^2 + 1$ et $v_{n+1} = n\, v_n$ et $v_0 = 0{,}5$. On se propose de faire afficher simultanément les dix premiers termes de chaque suite sur la calculatrice.

Avec une TI

[mode] [Suite] [Y=] [2^nde] [window] [2^nde] [Table]

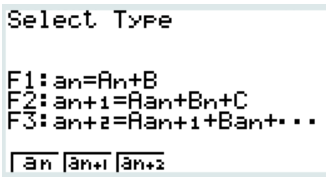


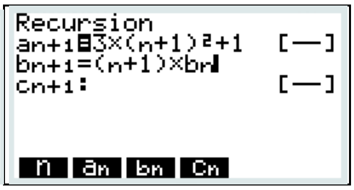


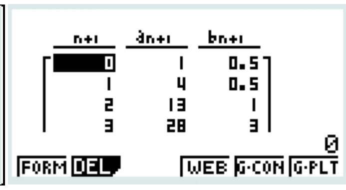


Avec une Casio

[menu]  [Exe] [F3] [F2] [F6]







Application :

Eric place 20 000€ à intérêts simples annuels de 5%. A la même date, Hervé place 18 000€ à intérêts composés annuels de 4%. On note u_n le capital d'Eric et v_n celui d'Hervé disponibles au bout de n années. (u_0 = 20 000 et v_0 =18 000).

1. Vérifier que pour tout n , u_n = 20 000 + 1 000 n et $v_n = (1{,}04)^n$ x 18 000.

2. En utilisant votre calculatrice déterminer le nombre d'année au bout desquelles le capital d'Hervé sera supérieur à celui d'Eric.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....