Matrices.

I. Définition.

Définition

Une matrice de taille $m \times n$ est un tableau de nombres formé de m lignes et n colonnes.
Une telle matrice s'écrit sous la forme :

A = $\left(\quad \right)$

Les nombres a_{ij} sont appelés les coefficients de la matrice. On note a_{ij} le coefficient de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne.

Exemple : $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille ....

....

....

Définition

❒ On appelle matrice carrée de taille n, une matrice de taille $n \times n$.
❒ On appelle matrice colonne, une matrice de taille $n \times 1$.
❒ On appelle matrice ligne, une matrice de taille $1 \times n$.

Exemples :

....

....

....

....

Définition

❒ On appelle matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls en dehors de la diagonale.
❒ On appelle matrice identité d'ordre n, noté I_n, la matrice diagonale de taille n ayant que des 1 sur la diagonale.

Exemples :

....

....

....

....

Propriété

Deux matrices sont égales si, et seulement si, elles sont la même taille et ont les coefficients égaux placés aux mêmes positions.

II. Opérations dans le monde des matrices.

1) Addition de matrices

Définition

Soit A et B deux matrices de même taille. La somme de A et B est la matrice, notée $A + B$, dont les coefficients sont obtenus en additionnant deux à deux des coefficients qui ont la même position dans A et B.

Exemple :
....
....
....
....

*Remarque : Il n'est possible d'additionner que des matrices **de même taille**.*

Propriété

Soit A, B et C trois matrices carrées de même taille. L'addition est une opération :
❒ Commutative: ....
❒ Associative: ....

Exemples :
....
....
....

2) Produit d'une matrice par un nombre réel

Définition

Soit A une matrice et k un nombre réel. Le produit de A par le réel k est la matrice, notée kA, dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k.

Exemples :
....
....
....

Propriété

Soit A et B deux matrices de même taille et deux réels k et k'.
❒ $(k + k')A = kA + k'A$
❒ $k(A + B) = kA + kB$
❒ $(kk')A = k(k'A)$

3) Produit d'une matrice par une matrice colonne

Définition

Soit A une matrice carrée de taille $m \times n$ et B une matrice colonne à n lignes telles que :

$A = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

Le produit de la matrice carrée A par la matrice colonne B est la matrice colonne à m lignes, notée $A \times B$ et égale à :

$$A \times B = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

Exemple :
....
....
....
....

4) Produit de deux matrices .

Définition

Soit A une matrice de taille m x n et B une matrice de taille n x p.
La produit de A et B est la matrice de taille m x p., notée A x B, dont les colonnes correspondent au produit de la matrice A par chaque colonne de la matrice B.

Exemple :

....

....

....

....

....

....

....

Remarque :

....

....

Propriété

Soit A,B et C trois matrices telles que les opérations suivantes existent, alors

❒ $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$ *on dit que* ....

❒ $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$

on dit que ....

5) Puissance d'une matrice carrée.

Définition

Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.
la puissance n-ième de A est la matrice, notée A^n, égale au produit de n facteurs A.

Exemple : *Soit* $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ *alors :*

....

....

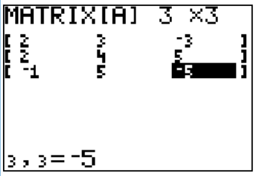
....

....

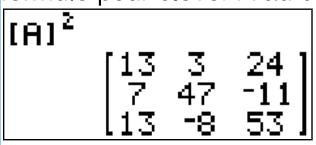
☑*Savoir faire : Savoir effectuer des calculs matriciels avec une calculatrice :*

Avec TI

Entrer dans le mode "Matrice" (MATRIX) puis "EDIT".
Saisir la taille de la matrice puis ses coefficients.

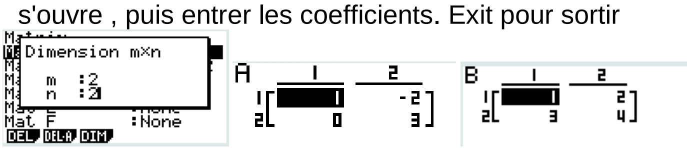


Quittez (QUIT) puis entrer à nouveau dans le mode "Matrice" et sélectionner la matrice A et compléter la formule pour élever A au carré.

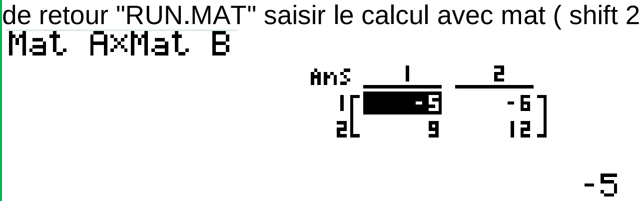


Avec Casio

Entrer dans le menu "RUN.MAT" puis choisir "MAT" (F1).
Choisir une matrice et saisir sa taille dans la fenêtre qui s'ouvre , puis entrer les coefficients. Exit pour sortir



de retour "RUN.MAT" saisir le calcul avec mat (shift 2)



III. Matrice inverse.

1) Matrice unité

Rappel

On appelle matrice unité de taille n, notée I_n la matrice diagonale carrée de taille n ayant que des 1 sur la diagonale.

Exemples :

……

……

……

……

……

Propriété

Pour toute matrice carrée A de taille n, on a : $A \times I_n = I_n \times A = A$

Exemple : Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *alors :*

……

……

……

……

2) Matrice inverse d'une matrice carrée

Définition

Une matrice carrée A de taille n est une matrice inversible s'il existe une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_n$. La matrice B, notée A^{-1} est appelée la matrice inverse de A.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ *alors :*

……

……

……

……

Remarque : Toutes les matrices ne sont pas inversibles.

☑ *Savoir faire : Savoir déterminer l'inverse d'une matrice carrée de taille 2 par le calcul :*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^{-1}.

……

……

……

……

……

……

……

Propriété

Soit A une matrice carrée inversible de taille n et M et N deux matrices carrées ou colonnes de taille n.
On a : $A \times M = N$, si et seulement si, $M = A^{-1} \times N$

Démonstration :

....

....

IV. Résolution d'un système linéaire.

Exemple : On considère le système (S) suivant : (S) = $\begin{cases} 4x - 6y + 5z = 1 \\ 3x - 5y + 5z = 2 \\ \quad\;\; -y + 2z = -1 \end{cases}$

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 3 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a alors $A \times X = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ et ainsi, le système peut s'écrire..........................

Définition

Soit A une matrice carrée inversible de taille n et B une matrice colonne à n lignes.
Alors le système linéaire d'écriture matricielle $A \times X = B$ admet une unique solution donnée par la matrice colonne $A^{-1}B$.

☑*Savoir faire : Savoir résoudre un système avec le calcul matriciel :*

Résoudre le système (S) suivant : (S) = $\begin{cases} 4x - 6y + 5z = 1 \\ 3x - 5y + 5z = 2 \\ \quad\;\; -y + 2z = -1 \end{cases}$

....

....

....

....

....

....

....

☑ *Polynésie 2013 :*

PARTIE B

Lors d'une campagne de marketing l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué.
À la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.
On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

1. Écrire un système traduisant cette situation.
2. Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$ où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$ et X et T sont des matrices que l'on précisera.
3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....