Calculs numériques (Rappels).

Pythagore de Samos est un mathématicien, astronome et philosophe grec du VI° siècle avant J-C. Il pense que « tout est nombre ».

I. Ensemble de nombres.

a) L'ensemble des nombres entiers naturels : ℕ.

Définition : Un nombre entier naturel est un nombre qui peut s'écrire sans virgule et qui est positif. L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté ℕ.

$\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;\ldots\}$; $4 \in \mathbb{N}$; $-2 \notin \mathbb{N}$

b) L'ensemble des nombres entiers relatifs : ℤ.

Définition : Un nombre entier relatif est un nombre entier qui est positif ou négatif.
L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté ℤ.

$-2 \in \mathbb{Z}$; $5 \in \mathbb{Z}$; $3{,}2 \notin \mathbb{Z}$. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

c) L'ensemble des nombres décimaux : 𝔻.

Définition : Un nombre décimal est un nombre de la forme $\frac{a}{10^p}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$. Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. L'ensemble des **nombres décimaux** est noté 𝔻.

$0{,}56 \in \mathbb{D}$; $3 \in \mathbb{D}$; $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$; $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

d) L'ensemble des nombres rationnels : ℚ.

Définition : Un nombre rationnel est un nombre sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des **nombres rationnels** est noté ℚ.

$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$; $4 \in \mathbb{Q}$; $-4{,}8 \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration : Raisonnement par l'absurde : On suppose $\exists\, p, q \in \mathbb{N}$ / $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et $\frac{p}{q}$ est irreductible. $2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ est pair.
$\exists\, p' / p = 2p'$ $\hookrightarrow 2q^2 = (2p')^2 = 4p'^2$
$\Rightarrow q^2 = 2p'^2$
$\Rightarrow q^2$ est pair
$\Rightarrow q$ est pair
Donc $\frac{p}{q}$ n'est pas irreductible.
Donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre $\mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

e) L'ensemble des nombres réels : ℝ.

Définition : L'ensemble des **nombres réels** est noté ℝ , est l'ensemble de tous les nombres connus en première.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres réels correspond à l'ensembles des abscisses des points d'une droite graduée (la droite numérique).

Remarque : Il existe un ensemble de nombres plus grand qui est au programme de Terminale, l'ensemble des nombres complexes. On le note ℂ.

II. Vocabulaire.

- La somme de deux termes a et b est le résultat de l'addition des nombres a et b, elle se note $a+b$.
- La différence de deux termes a et b est le résultat de la soustraction des nombres a et b, elle se note $a-b$.
- Le produit de deux facteurs a et b est le résultat de la multiplication des nombres a et b, il se note $a \times b$.
- La quotient de deux nombres a et b est le résultat de la division de a par b. *Il se note* $\frac{a}{b}$.

Définition : Deux nombres réels sont dits opposés si leur somme est nulle.
L'**opposé** du nombre réel a *se note* $(-a)$. Il vérifie $a+(-a)=0$ et $-a=(-1)\times a$

Définition : Deux nombres réels non nuls sont dits inverses si leur produit est égal à 1.
L'**inverse** du nombre réel a *se note* $\frac{1}{a}$. Il vérifie $a \times \frac{1}{a}=1$ et $1:a=\frac{1}{a}$.

Règle des signes : Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $-(a+b)=(-1)\times(a+b)=-a-b$
- $(-a)\times b=a\times(-b)=-ab$
- $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$

III. Opérations avec des nombres rationnels.

- $\dfrac{a\times c}{b\times c}=\dfrac{a}{b}$
- $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$
- $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\times c}{b\times d}$
- $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$

IV. Racines carrées.

Définition : a étant un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif qui multiplié par lui-même est égal à a.
$\sqrt{9}=3$ $\sqrt{0}=0$ $\sqrt{1}=1$ $\sqrt{2}\approx 1{,}414$ $\sqrt{3}\approx 1{,}732$

- Seuls les nombres positifs ou nuls ont une racine carrée. Un réel négatif n'a pas de racine carrée. Ainsi $\sqrt{-3}$ *n'existe pas* car il n'y a pas de nombre qui, multiplié par lui-même, soit égal à -3. (le carré d'un nombre réel est toujours positif).
- Si a est positif, $\sqrt{a}$ existe et est toujours positif ; $-\sqrt{a}$ existe aussi et est négatif.

- $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$

V. Puissances.

Définition : Soit $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, $a^n=a\times a\times a\ldots\ldots\times a$. (avec n facteurs) ; $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

$2^3=2\times2\times2=8$; $(-5)^2=25$; $a^1=a$; $a^0=1$; $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$; $4^{-1}=\frac{1}{4}=0{,}25$.

- $a^n\times a^m=a^{n+m}$
- $(a^n)^m=a^{n\times m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

Définition : L'écriture scientifique d'un nombre est son écriture sous la forme $a\times10^n$ avec $1\le a<10$.

VI. Egalités remarquables.

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$