

La fonction exponentielle.

I. Définition.

Théorème

Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Démonstration :

- **Existence** : on admet l'existence d'une telle fonction.
- **Unicité** : cette démonstration est exigible pour le bac : ROC

- Démontrons que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$

On rappelle que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $v : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x) = a f'(ax+b)$. En particulier, la fonction $v : x \mapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x) = -f'(-x)$.

Ainsi, la fonction φ , produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a : $\varphi(x) = u(x) \times v(x)$ où $u(x) = f(x)$ donc $u'(x) = f'(x)$ et $v(x) = f(-x)$ donc $v'(x) = -f'(-x)$.

En appliquant la formule de dérivation d'un produit, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x) \\ = f(x)f'(x) - f(x)f'(x) = 0$$

Donc φ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Or $\varphi(0) = f(0) \times f(-0) = 1$, et donc, pour tout nombre réel x , $\varphi(x) = 1$ c'est-à-dire que $f(x) \times f(-x) = 1$. On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

Démontrons maintenant l'unicité (ROC), c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Pour cela, supposons qu'il existe une autre fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$, on montre alors que $g = f$, c'est-à-dire que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)$, ce qui prouvera l'unicité de la fonction.

Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car g et f le sont et f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{[f(x)]^2} = 0$ car $f' = f$ et $g' = g$.

Ainsi, h est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Or, $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$.
Donc $\forall x, g(x) = f(x)$. La fonction f est unique.

Définition

On appelle fonction exponentielle l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. On note cette fonction **exp**.

Propriété

$\exp(0) = 1$; pour tout nombre réel x , $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

II. Propriétés de la fonction exp.

1) Relation fonctionnelle

Propriété

Pour tout nombre réel x et y , $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

On dit que la fonction exponentielle « transforme » une somme en un produit.

Démonstration :

Soit y un nombre réel quelconque et fixé et soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$

1. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que h' est la fonction nulle.

$$h(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \frac{\exp'(x+y) \times \exp(x) - \exp(x+y) \times \exp'(x)}{(\exp(x))^2}$$
$$\frac{\exp(x+y) \times \exp(x) - \exp(x+y) \times \exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0 \text{ Donc } h \text{ est constante}$$

2. En déduire que pour tout nombre réel x , $h(x) = \exp(y)$ (on pourra calculer $h(0)$)

$$h(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \exp(y)$$

3. En déduire que pour tous nombres réels x et y , $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

$$\forall x, \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y) \text{ soit } \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Corollaires

Pour tout nombre réel x et y , et pour tout entier relatif n : $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$; $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

Éléments de démonstration :

2) Le nombre e

Définition

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e . On a ainsi $\exp(1) = e$.

Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e . $e \approx 2,718281828$

On a donc, pour tout entier relatif n : $\exp(n) = \exp(1 \times n) = [\exp(1)]^n = e^n$

Par extension, on convient de noter pour tout nombre réel x , $\exp(x) = e^x$ (lire « exponentielle de x » ou « e exposant x »)

Propriété

Avec cette notation, les propriétés précédentes s'écrivent : Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad e^{nx} = (e^x)^n$$

Remarque :

- Ainsi, le nombre $\exp(3) = e^3$ est bien égal à $e \times e \times e$
- On a, par exemple, $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

III. Etude de la fonction $\exp$.

1. Sens de variation de la fonction $\exp$

Propriété

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que la fonction $\exp$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que : pour tout réel x , $e^x > 0$. Pour cela, on suppose que : $\exists a / e^a < 0$ (hypothèse absurde)

Or, on sait que, pour tout réel x , $e^x \neq 0$. Ainsi, on suppose qu'il existe un réel a tel que $e^a < 0$.

Or, la fonction exponentielle est dérivable donc **continue** sur $\mathbb{R}$ et

Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que : il existe au moins un réel α tel que $e^\alpha = 0$.

Ce qui est contradictoire avec la propriété (démontrée précédemment) : pour tout réel x , $e^x \neq 0$.

On en déduit que notre supposition (absurde) : Il existe un réel a tel que $e^a < 0$ est fautive, et donc que sa « négation » est vraie ; c'est-à-dire que : $\forall x, e^x > 0$.

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$. Or, pour tout nombre réel x , $\exp(x) > 0$, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

conséquences :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \quad \text{et} \quad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

$$\text{En particulier : } e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de $\exp$		

2. Limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $\exp$

Propriété

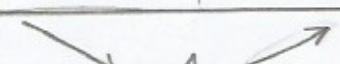
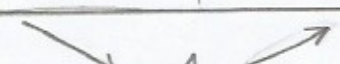
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Démonstration : (exigible BAC ROC)

Montrons que, pour tout nombre réel x , $e^x > x$. On pourra alors conclure en appliquant un théorème de comparaison de limites.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x$. Etudier les variations de f et en déduire le signe de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x - x & f'(x) &= e^x - 1 \\ f'(x) &> 0 & \text{Donc } \forall x, f(x) > 0 \text{ soit } e^x - x > 0 \\ e^x - 1 &> 0 & \text{Donc } e^x > x \quad \forall x \\ e^x &> 1 \\ e^x &> e^0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de f'	$-$	$ $	$+$
V de f		1	

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\forall x, e^x > x$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Propriété

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Démonstration : (exigible BAC ROC)

Or, quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$ donc par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$$

Conséquence graphique : la droite d'équation $y=0$ est asymptote à $\exp$ en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

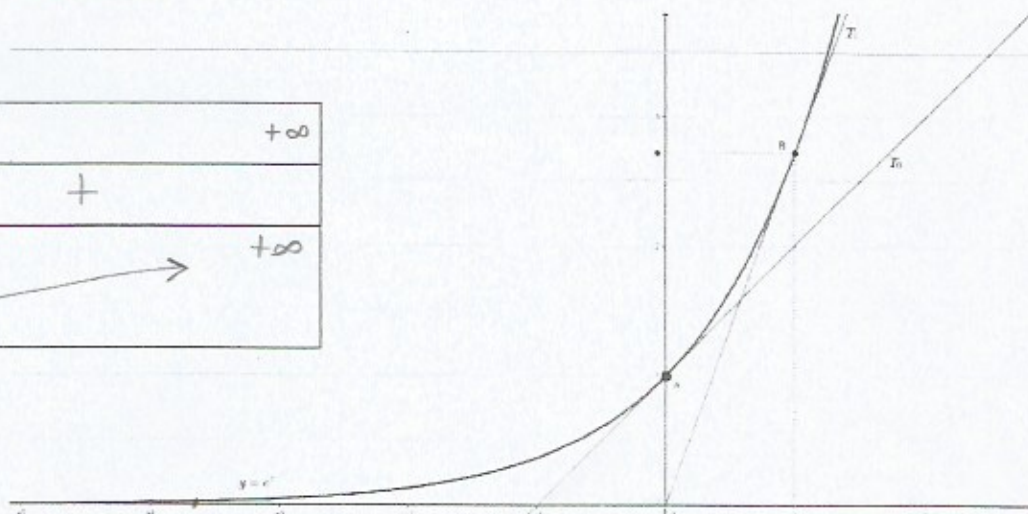
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$



3. Conclusion

x	$-\infty$	$+\infty$
Signes de $(e^x)' = e^x$	+	
variations exp	$0 \rightarrow \rightarrow \rightarrow +\infty$	



Déterminons les équations réduites des tangentes T_0 et T_1 aux points A et B d'abscisse 0 et 1 :

$$T_0: y = e^0(x-0) + e^0 = x + 1$$

$$T_1: y = e^1(x-1) + e^1 = ex - e + e = ex$$

IV. Compléments sur la fonction exp.

a. Des limites à connaître :

Propriété

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration : on rappelle que, si f est une fonction dérivable en a alors $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^0 = 1$$

Propriété croissance comparée de x et e^x

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0.$$

Remarque : on dit qu'« à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur x . »

Démonstration :

b. Fonctions $x \rightarrow e^{u(x)}$:

Notation : u désigne une fonction définie sur un intervalle I . On note e^u la fonction $x \rightarrow e^{u(x)}$.

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $e^u : x \rightarrow \exp[u(x)]$ est dérivable sur I et

$$(e^u)' = u'e^u$$

Exemples : calculons les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = e^{x^2+x+1}$

1) $f(x) = e^{x^2+x+1}$
donc $f = e^u$ avec
 $u(x) = x^2+x+1$
donc $f' = u'e^u$
avec $u'(x) = 2x+1$
Donc $f'(x) = (2x+1)e^{x^2+x+1}$

2) $f(x) = e^{2x+1}$

2) $f(x) = e^{2x+1}$
donc $f = e^u$ avec
 $u(x) = 2x+1$ et
 $f' = u'e^u$ avec
 $u'(x) = 2$
donc $f'(x) = 2e^{2x+1}$

3) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ pour x réel non-nul.

3) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
donc $f = e^u$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$
et $f' = u'e^u$ avec
 $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc
 $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

Propriété

Limites de la fonction e^u

a désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$. l désigne un nombre réel.

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{-\infty} = 0$

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^l = e^l$

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{+\infty} = +\infty$

Exemples-types :

Exemple 1 : Les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = e^{-kx}$ où k est un nombre réel **strictement positif**.

- Calculer les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Dresser le tableau de variations de la fonction f_k .
- Etudier la position relative des courbes C_k et $C_{k'}$ où k et k' sont deux réels tels que $k < k'$.

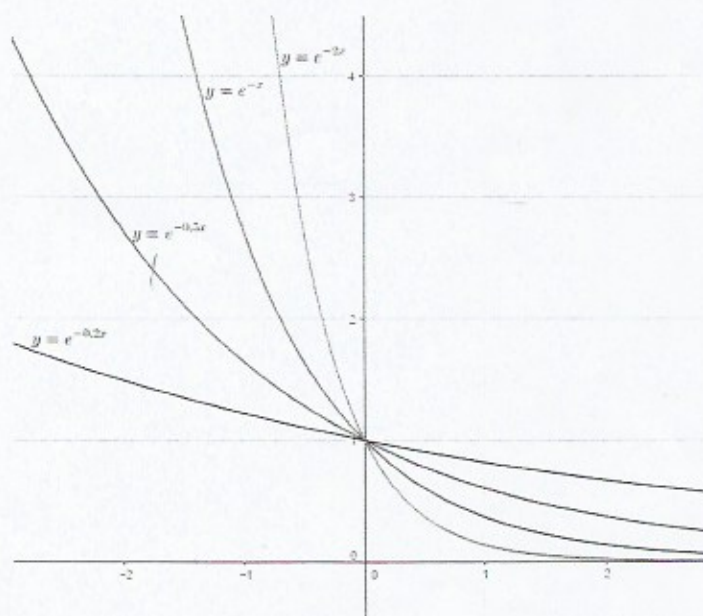
i- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -kx = +\infty$ Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-kx} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kx} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -kx = -\infty$ Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kx} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-kx} = +\infty$

ii-	x	$-\infty$	$+\infty$
signes de f_k		+	+
V		$+\infty$	0
de f_k			



$$\text{III- } k' > k$$

Ck' au dessus de Ck sur $] -\infty; 0[$

Ck' au dessous de Ck sur $] 0; +\infty[$

Ck' et Ck se coupe en $(0; 1)$

$$\forall k \quad f_k(0) = e^{-k \times 0} = e^0 = 1 \quad (0, 1) \in Ck \quad \forall k$$

$$f_k(x) > f_{k'}(x)$$

$$e^{-kx} > e^{-k'x}$$

$$-kx > -k'x$$

$$\rightarrow kx < k'x$$

$$x > 0$$

$$k < k'$$

$$x > 0 \quad kx < k'x$$

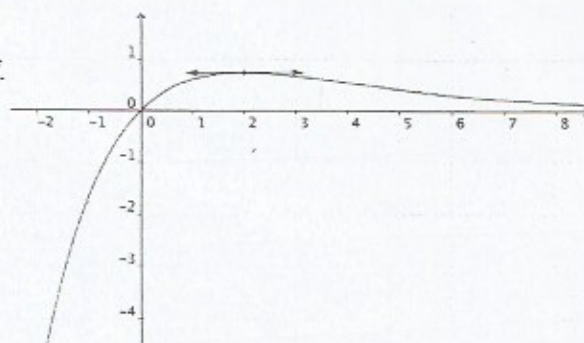
$$x < 0 \quad kx > k'x$$

$$f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$$

Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$.

- Etudier les limites de f à l'infini.
- Calculer la dérivée de la fonction f .
- Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- Tracer la courbe représentative de la fonction f .

$$1 = \frac{e^x}{e^x}$$



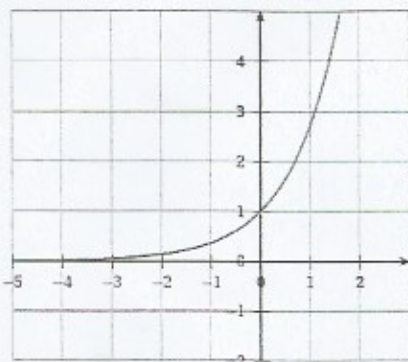
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
 Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2) \times (\frac{x}{2}) \times e^{\frac{x}{2}} = 0$ car
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = -\infty$
 - SEE BEHIND -

☑ BAC S, Liban mai 2015

EXERCICE 3

3 points

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = e^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

- Dans cette question, on choisit $m = e$.
Démontrer que la droite $\mathcal{D}_e$, d'équation $y = ex$, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.
- Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m , le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_m$.
- Démontrer cette conjecture.*

☑ BAC S, Antilles Guyane Juin 2014

EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

- Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).

En déduire le signe de $g(x)$.

- Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
- On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = e^{-x} g(x).$$

- En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
- Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
 - Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T .