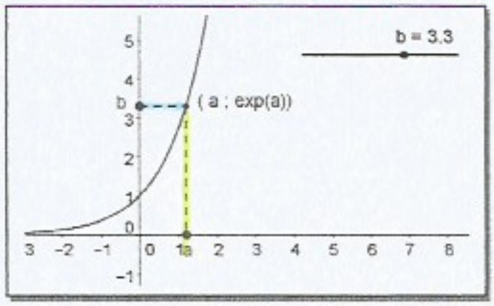
Fonction logarithme népérien.

Activités 1 et 2 p 136 et 137

I. Définition et premières propriétés.

1) Définition.

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0 ; +\infty[$. De plus, $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel b de $]0 ; +\infty[$ l'équation $e^x = b$ admet une unique solution a dans $\mathbb{R}$.



Définition

On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif b, l'unique solution de l'équation (E) : $e^x = b$. On note ce nombre $ln(b)$.

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $ln : x \mapsto ln(x)$.

Exemple :

L'équation (E) : $e^x = 3$ admet une unique solution. Il s'agit de $x = \ln(3)$

A l'aide de la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée : $x \approx 1,09...$

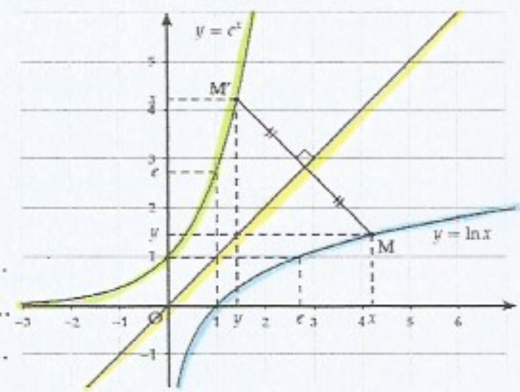
Conséquences : *Elles découlent directement de la définition :*

Propriété

- $a = ln(b)$ avec $b > 0 \Leftrightarrow e^a = b$.
- Pour tout x, $ln(e^x) = x$.
- Pour tout x positif, $e^{ln(x)} = x$.
- $ln(1) = 0$ (car $e^0 = 1$)
- $ln(e) = 1$ (car $e = e^1$)
- $ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ (car e^{-1})

Propriété

Dans un repère, les courbes représentatives des fonction exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



$A(x ; e^x)$ et $B(e^x ; x)$ sont symétriques

par rapport à $y = x$

2) Equations et inéquations avec la fonction ln.

Propriété

la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

Démonstration :

Soient a et $b \in]0;+\infty[$ / $a < b$ alors $e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)}$

Donc $\ln(a) < \ln(b)$ car la fonction exp est croissante. Donc ln est croissante sur $]0;+\infty[$

Conséquences :

Propriété

Pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$:

- $ln(b) = ln(a) \Leftrightarrow b = a.$
- $ln(b) < ln(a) \Leftrightarrow b < a.$
- $ln(a) < 0 \Leftrightarrow$ $a < 1$
- $ln(a) > 0 \Leftrightarrow$ $a > 1$

☑Savoir-faire : Savoir résoudre des équations avec du ln :

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

$(E_1) : ln(x) = 2$ $(E_2) : e^{x+1} = 5$ $(E_3) : 3ln(x) - 4 = 8$ $(I_1) : \ln(6x-1) \geq 2$ $(I_2) : e^x + 5 > 4e^x$

$(E_1) : \ln(x) = 2$

$x = e^2$

$(E_2) = e^{x+1} = 5$

$x + 1 = \ln(5)$

$x = -1 + \ln(5)$

$(E_3) : 3\ln(x) - 4 = 8$

$3\ln(x) = 8 + 4$

$\ln(x) = 4$

$x = e^4$

$6x - 1 \geqslant e^2$

$6x \geqslant e^2 + 1$

$x \geqslant \dfrac{e^2+1}{6}$

$-3e^x > -5$

$e^x < \frac{5}{3}$

$\ln(e^x) < \ln\frac{5}{3}$ car ↗

$x < \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

II. Propriété algébriques.

1) Relation fonctionnelle.

Théorème

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Démonstration :

$x \times y = e^{\ln(x \times y)}$ et $x \times y = e^{\ln(x)} \times e^{\ln(y)} = e^{[\ln(x) + \ln(y)]}$ Donc $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Remarque : Cette formule permet de transformer un produit en somme.

2) Logarithme d'un inverse, d'un quotient, d'une puissance ….. :

Propriété

Pour réel x et y strictement positif, on a :

- $ln(\frac{1}{x}) = - ln(x)$
- $ln(\frac{x}{y}) = ln(x) - ln(y)$
- $ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} ln(x)$
- $ln(x^n) = n\ ln(x)$

Démonstrations :

- $\ln(x \times \frac{1}{x}) = \ln(x) + \ln(\frac{1}{x}) = \ln(1) = 0$ Donc $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x \times \frac{1}{y}) = \ln(x) + \ln(\frac{1}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$.
- $\ln(x) = \ln(\sqrt{x}^2) = 2\ln(\sqrt{x})$ car $x > 0$
- recurrence pour la dernière

☑Savoir-faire : Savoir simplifier une écriture avec du ln :

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$	$B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$	$C = \ln e^2 - \ln\frac{2}{e}$
$\ln(3^2 - \sqrt{5}^2) = \ln(9-5) =$	$\ln(2^3) + \ln(5) - \ln(3^2)$	$2\ln(e) + \ln\left(\frac{e}{2}\right)$
$\ln(4) = 2\ln(2)$	$\ln\left(\frac{8 \times 5}{9}\right)$	$2 + \ln(e) - \ln(2)$
	$= \ln\left(\frac{40}{9}\right)$	$3 - \ln(2)$

III. Etude de la fonction logarithme népérien.

1) Continuité et dérivabilité

Propriété

La fonction logarithme népérien est dérivable sur] 0 ; +∞ [et $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$

Démonstration :

On admet que la fonction ln est dérivable sur]0 ; + ∞[, Soit f la fonction définie sur]0 ; + ∞[par $f(x) = e^{\ln x} = x$.

$f'(x) = 1$ et $f'(x) = [\ln(x)]' \times e^{\ln(x)}$

car $((e^u)' = u' e^u)$

Donc $1 = [\ln(x)]' \times x$ Donc $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Remarque : On retrouve ln est croissante (en effet sa derivée est positive)

Propriété

La fonction logarithme népérien est continue sur] 0 ; +∞ [.

Démonstration :

ln est une fonction derivable donc elle est continue.

Exemple : Dériver la fonction suivante sur l'intervalle $]0;+\infty[$: $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

$f'(x) = u \times v$ $u(x) = \ln(x)$ $v(x) = \ln(x)$ $u'(x) = \frac{1}{x}$ $v'(x) = \frac{1}{x}$ $f'(x) = u'v + uv'$

$f'(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = 2\frac{\ln(x)}{x}$ // $\frac{u}{v}$ $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ $= \frac{2\ln(x)/x \times x - [\ln(x)]^2}{x^2}$

$u(x) = (\ln(x))^2$ $v(x) = x$ $= \frac{\ln(x)[2 - \ln x]}{x^2}$

$u'(x) = \frac{2\ln x}{x}$ $v'(x) = 1$

2) Limites aux bornes

Propriété

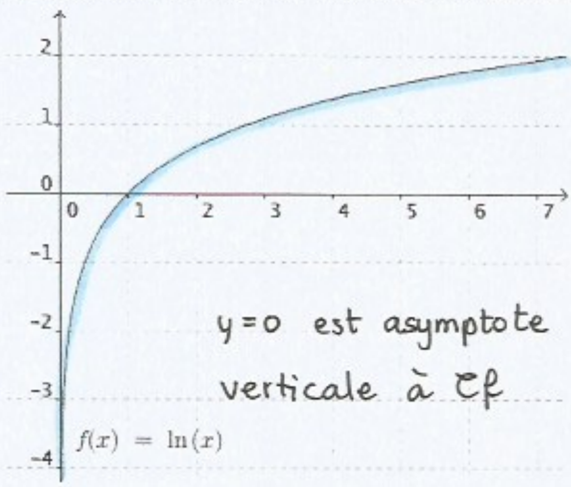
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

Démonstration :

3) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0	$+\infty$
Signes de $ln'(x)$	‖	+
Variations de ln	‖ $-\infty$	$+\infty$



IV. Compléments sur la fonction ln.

1) Limites à connaitre

Propriété

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration :

$\frac{u'}{u}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Propriété (croissances comparées)

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$.

Démonstration :

☑Savoir-faire : Savoir déterminer une limite avec du ln :

a) $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x)$

$x - \ln(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Donc $\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1$

Donc $\lim_{x \to +\infty} x - \ln(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

$X = x - 1$

$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} =$

$\lim_{X \to 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x - 1}$

?

2) Fonctions de la forme $ln\ (u)$

Notation : u désigne une fonction strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $x \mapsto ln[u(x)]$ définie sur I est notée $ln(u)$.

Propriété (admise)

u désigne une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $ln(u)$ est dérivable sur I et $(ln(u))' = \frac{u'}{u}$

Conséquence : Les fonctions u *et* $ln(u)$ *ont le même sens de variations* sur I.
En effet, $(\ln u)'$ et u' sont de même signe car $u > 0$.

☑Savoir-faire : Savoir dériver une fonction composée avec du ln :

Justifier que les fonctions suivantes sont dérivables sur ℝ et calculer les fonctions dérivées.

$f(x) = \ln(x^2 + 2)$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+2}$ $\quad u(x) = x^2 + 2$ $\quad u'(x) = 2x$

$g(x) = \ln(e^{2x} + e^x + 1)$

$g'(x) = \frac{2e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} + e^x + 1}$

$u(x) = e^{2x} + e^x + 1$

$u'(x) = 2e^{2x} + e^x + 1$