Primitives d'une fonction continue.

I. Définition et propriétés.

Introduction :

On considère les fonctions suivantes définies sur IR : $f : x \to 2x + 3$. et $F : x \to x^2 + 3x - 1$.
On remarque que l'expression de la dérivée de .F... *est égale à l'expression de* .f...
C'est-à-dire que $F' = f$..........................
On dit dans ce cas que F est une ..primitive............ *de f sur IR.*

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle I. On appelle <u>primitive</u> de *f* sur I, une fonction *F* dérivable sur I telle que $F' = f$

☑*Savoir-faire : Savoir Montrer qu'une fonction donnée est une primitive :*
Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1-(x+1)e^{-x}$. *Prouve que la fonction F définie sur IR par* $F(x) = x + (x+2)e^{-x}$ *est une primitive de f sur IR.*

$F = x + (x+2)e^{-x}$
$F = w + uv$
avec $w(x) = x$ $u(x) = (x+2)$
$v(x) = e^{-x}$
$F' = w' + u' \times v + v' \times u$ $w'(x) = 1$ $u'(x) = 1$
$v'(x) = -e^{-x}$

$F' = 1 + 1(e^{-x}) + (-e^{-x})(x+2)$
$= 1 - (x-1)e^{-x} = f(x)$
Donc F est une primitive de f

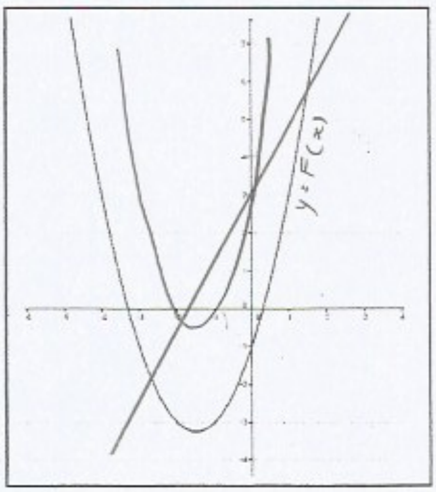
Propriété

f est une fonction continue sur un intervalle I. Si *F* est une primitive de *f* sur I alors pour tout réel *k*, la fonction $G = F + k$ .... est une primitive de f.

Démonstration : F est une primitive de f donc $\forall x$ $F'(x) = f(x)$
$G' = (F + k)' = F' + 0 = f$

Réciproquement Soit F et G deux primitives de f alors $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$
Donc $\exists k$ / $F - G = k$ Donc $F = G + k$ deux primitives differents d'une constante

Exemple :



Soit $f : x \to 2x + 3$. *On a vu* $F : x \to x^2 + 3x - 1$. *Est une primitive de f.*
G / $G(x) = x^2 + 3x + 5$ est aussi une primitive de f.
De plus toutes les primitives de f on une expression de la forme
$x^2 + 3x + k$

Propriété

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle [*a* ; *b*]. On donne deux réels x_0 et y_0 avec $x_0 \in [a ; b]$. Alors il existe une <u>unique</u> primitive G de *f* sur [*a* ; *b*] telle que $G(x_0) = y_0$.

Trouve la primitive de f / $G(1) = 2$ Donc $G / G(x) = x^2 + 3x + k$
$G(1) = 1^2 + 3 \times 1 + k = 4 + k$ $G(1) = 2$ donc $k + 4 = 2$
Donc $k = -2$ $G(x) = x^2 + 3x - 2$

II. Existence de primitives.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Principe de démonstration :

On se place dans le cas où I est un intervalle fermé [a ; b] et on admet le résultat suivant : Toute fonction continue sur un intervalle fermé admet un maximum et un minimum sur cet intervalle.

Remarque : ***Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction*** $x \mapsto e^{-x^2}$ ***ne possède pas de primitive sous forme explicite.***

III. Primitives des fonctions usuelles.

fonction f d'expression	*Une primitive*	*Intervalle*
$f(x) = k \ (k \in \mathbb{R})$	$F(x) = k\,x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (*n entier positif*)	$F(x) = \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (*n entier ≥2*)	$F(x) = \left(\frac{-1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}\right)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = -2\sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$		$\mathbb{R}$

$\frac{1}{x^3}$

$\frac{-1}{2} \times \frac{1}{x^2}$

IV. Primitives et opérations sur les fonctions.

Propriété

f et g sont deux fonctions continues sur $[a ; b]$.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a ; b]$ alors :
- ...F + G... est une primitive de $f + g$,
- ...kF........ est une primitive de kf avec k réel.

Démonstration :

- $(F+G)' = F' + G' = f + g$
- $(kF)' = k \times F' = kf$

Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction	*Une primitive*	*Conditions*
$u'u^n$ $n \neq -1$ entier		
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$		
$\frac{u'}{u}$		
$u'e^u$		
$u(ax+b)$ $a \neq 0$		

☑*Savoir-faire : Savoir rechercher des primitives :*

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = xe^{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3}$ sur $I =]0;+\infty[$

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I = \mathbb{R}$

e) $f(x) = \cos(2x) - 3\sin(3x-1)$ sur $I = \mathbb{R}$

f) $f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$ sur $I = \mathbb{R}$

a) $f(x) = x^3 - 2x$
$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 7$

b) $f(x) = xe^{x^2}$
$F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$

c) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3}$

$F(x) = x^3 - \left(\frac{-3}{2} \times \frac{3}{x^2}\right)$