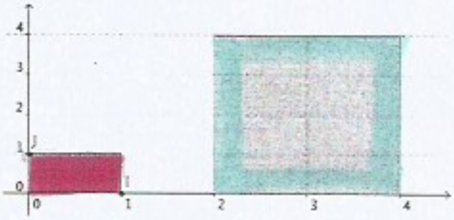
Intégration.

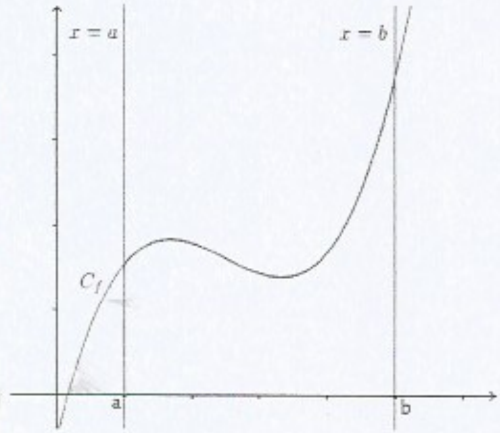
I. Intégrale et aire.

1) Unité d'aire



Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle unité qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1u.a. L'aire du rectangle vert est égale 8 fois à l'aire du rectangle rouge. L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a. Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm² par exemple).

2) Définition



Définition

Soit f une fonction continue et positive sur $I = [a ; b]$,
on appelle intégrale de f sur $[a;b]$: l'aire en unité d'air du domaine délimité par $x = a$; $x = b$; $y = 0$ et C_f
On le note $\int_a^b f(x)\,dx$

3) Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a ; b]$ se note : $\int_a^b f(x)\,dx$

Et on lit "intégrale de a à b de $f(x)dx$".

Remarques :

- a et b sont appelés les bornes de l'intégrale
- x est la variable........ Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs. Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x)\,dt$ .... "dx" ou "dt" nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1] et se note : $\int_0^1 x^2\,dx$

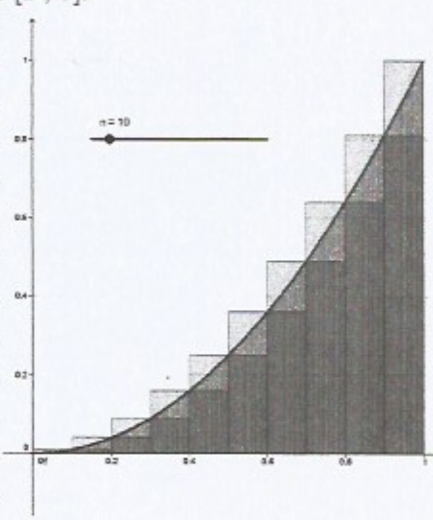
Nous avons vu en activité que ....

$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\times 1^3 - \frac{1}{3}\times 0^3 = \frac{1}{3}$ u.a

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = \mathcal{A}$

4) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a ; b]$.



On partage $I : [0;1]$ en n rectangles de même longueur $\frac{1}{n}$.
On construit des rectangles inférieurs à la courbe.
Soit U_n la somme des aires de n rectangles
$U_n = \frac{1}{n} \times \left(f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right)$ ou
$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

On définie de même la somme des aires de rectangles supérieurs $V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Alors $\forall n \quad U_n \leq \mathcal{A} \leq V_n$

$\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{3}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{3}$

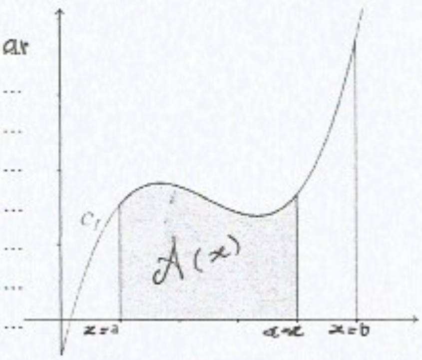
Donc d'après le théorème de gendarmes, $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$ u.a.

5) Fonction définie par une intégrale

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $I=[a;b]$. Alors la fonction $\mathcal{A} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable et $\mathcal{A}'(x) = f(x)$

Démonstration dans le cas où f est strictement croissante :



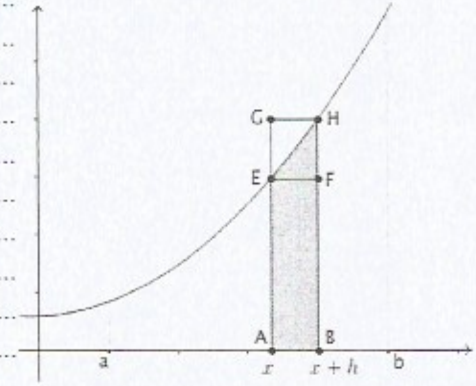
On considère la fonction $\mathcal{A}$ qui est donc l'aire du domaine delimité par C_f ; $x=a$; $x=x$; $y=0$. Essayant de déterminer

$\mathcal{A}'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)}{h}$

* on suppose que $h>0$, $\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)$ correspond à l'aire du domaine delimité par C_f ; $y=0$; $x=x$; $x=x+h$ alors on peut encadrer cet Aire par l'aire du rectangle $\mathcal{A}_{ABEF} \leq \mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x) \leq \mathcal{A}_{ABHG}$

Soit $h \times f(x) \leq \mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x) \leq h \times f(x+h)$

Soit $f(x) \leq \dfrac{\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x+h)$ car $h>0$



Or $\lim\limits_{h\to 0} f(x) = f(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ car f continue

Donc d'après le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)}{h} = f(x)$

☑*Savoir-faire : Savoir étudier une fonction définie par une intégrale:*

Soit F la fonction définie sur [0 ; 10] par $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2}\,dt$.

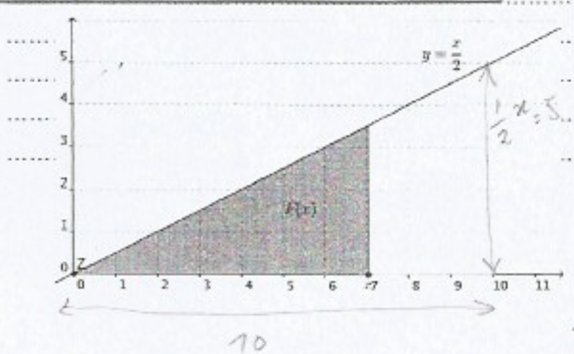
a) Etudier les variations de F.

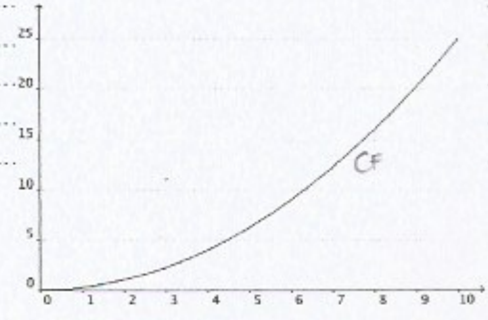
b) Tracer sa courbe représentative.

a) D'aprés la propriété F est dérivable et $F'(x) = \frac{1}{2}x$

x	0		10
signes de $F'(x)$	0	+	
Variat. de F	0	↗	25

b)





II. Intégrale d'une fonction continue.

1) Extension de la notion d'intégrale.

Propriété

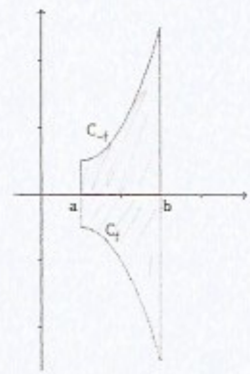
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$.Si F est une primitive de f alors
$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration: Soit $\mathcal{A} : x \to \int_a^x f(t)\,dt$
Par théorème, $\mathcal{A}$ est une primitive de f. Donc $\exists k \,/\, \mathcal{A} = F + k$
Donc $\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a) = F(b) + k - (F(x) + k)$
$= F(b) - F(a)$

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a\,;\,b]$.
alors on definit $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Remarque :
La définition est étendue à des fonctions de signe quelconque.
Ainsi pour une fonction f négative sur $[a\,;\,b]$, on peut écrire :
$\int_a^b f(x)\,dx = -\mathcal{A}$ du domaine delimité $x = a$; $x = b$; $y = 0$; $y = f$
Ex: $\int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{2}(-1)^2 = 0$



Dans ce cas, l'intégrale de la fonction f sur $[a\,;\,b]$ est égale à l'opposé de l'aire comprise entre l'axe des abscisse et la courbe représentative de f sur $[a\,;\,b]$.

Notations :

On écrit : $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

☑*Savoir-faire : Savoir calculer une intégrale à partir d'une primitive.*

Calculer : $A = \int_2^5 \left(3x^2 + 4x - 5\right)dx$ $\qquad B = \int_{-1}^{1} e^{-2x}\,dx$ $\qquad C = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 3}\,dx$

$A = \int_2^5 (3x^2 + 4x - 5)\,dx = \left[x^3 + 2x^2 - 5x\right]_2^5 = 150 - 6 = 144$ u.a.

$B = \int_{-1}^{1} e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right] = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^{2} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$

$C =$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ $\qquad$ b) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Démonstration: Soit F une primitive de f.

$\int_a^a f(x)d = F(a) - F(a) = 0$

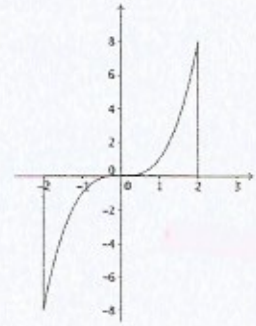
$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\,dx$

Remarque :

Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.

Par exemple :

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}\times 2^4 - \frac{1}{4}\times(-2)^4 = 4-4=0.$$



2) Relation de Chasles

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a, b et c trois réels de I $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Démonstration: Soit F une primitive de f.

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \cancel{F(c)} - F(a) + F(b) - \cancel{F(c)}$

$= F(b) - F(a) = \int_a^b F(x)dx.$

3) Linéarité

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Démonstration:

$\int_a^b f(x)dx = [k.F(x)]_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b)-F(a)) = k\int_a^b f(x)dx.$

$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = [F(x)+G(x)]_a^b = F(b)+G(b) - (F(a)+G(a))$ ...

☑Savoir-faire : Savoir calculer une intégrale en appliquant la linéarité.

On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$

a) Calculer $A+B$ et $A-B$.

b) En déduire A et B.

$A+B = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx + \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x + \sin^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi.$

3) Inégalités

démonstration :

$f(x) \geq g(x)$ donc $f(x) - g(x) \geq 0$

donc $\int_a^b f(x) - g(x)\, dx \geq 0$

donc $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$

donc $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

savoir-faire :

a)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signes de $x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\forall x \in [0,1]$ $x(x-1) \leqslant 0$

$x^2 \leqslant x$

$e^{x^2} \leqslant e^x$ car exponentielle est croissante

$0 \leqslant e^{x^2} \leqslant e^x$ car exp positive.

EX

$m = \frac{1}{10-0} \int_0^{10} 3x^2 - 4x + 5\, dx$

$m = \frac{1}{10} \left[x^3 - 2x^2 + 5x\right]_0^{10}$

$m = \frac{1}{10} \times \left[(10^3 - 2\times10^2 + 5\times10) - (0^3 - 2\times0^2 + 5\times0)\right]$

$m = \frac{1}{10} \times 850 = 85$

3) inégalités

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \leq b$.

a) Si, pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

b) Si, pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration:

. f est positive et continue donc $\int_a^b f(x)dx$ correspond à l'aire du domaine délimité $x=a$; $x=b$; $y=0$ et Cf.

. voir back of page 74

☑Savoir-faire : Savoir encadrer une intégrale.

a) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e-1$.

a) voir p 74 back

b) $\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 e^{x^2}dx \leq \int_0^1 e^x\,dx$.

$0 \leq \int_0^1 e^{x^2}dx \leq [e^x]_0^1$

$0 \leq \int_0^1 e^{x^2}dx \leq e-1$

III. Valeur moyenne d'une fonction.

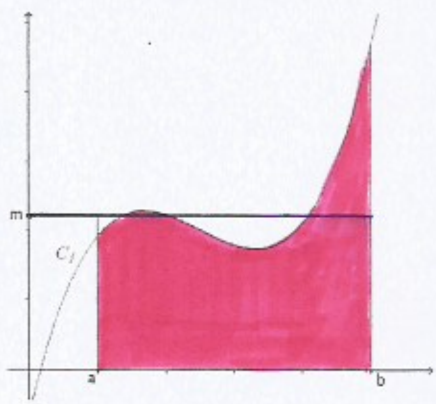
Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a \neq b$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ le nombre réel $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Interprétation géométrique :

L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu).



Exemple :

Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle [0 ; 10].

✳ voir p 74 back