Nombres complexes.

I. L'ensemble $\mathbb{C}$.

Définition

Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :
- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ avec a et b réels.

Exemples : $z_1 = 3 + 4i$; $z_2 = -2 - i$; $z_3 = \frac{i}{3}$ sont des nombres complexes.

Vocabulaire :
- L'écriture $a + ib$ d'un nombre complexe z est appelée la forme algébrique de z.
- Le nombre a s'appelle la partie réelle et la nombre b s'appelle la partie imaginaire. On note $\mathrm{Re}(z) = a$ et $\mathrm{Im}(z) = b$.
- Si $b = 0$ alors z est un nombre réel.
- Si $a = 0$ alors z est un nombre imaginaire pur.

☑ *Savoir-faire : Savoir effectuer des calculs sur les nombres complexes.*
Calculer et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$ $\quad$ $z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$ $\quad$ $z_3 = (2 - 3i)^2$

$z_4 = (2i)^{13}$ $\quad$ $z_5 = \frac{1}{4 - 2i}$ $\quad$ $z_6 = \frac{1 + i}{2 - i}$

$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4) = 3 - 5i - 3i + 4 = 7 - 8i$

$z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i) = -3 + 15i + 2i + 10i^2 = 7 + 17i$

$z_3 = (2 - 3i)^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$

$z_4 = (2i)^{13} = 2^{13} \times i^{13} = 8192i$

$z_5 = \frac{1}{4 - 2i} = \frac{4 + 2i}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{4 + 2i}{4^2 - 2i^2} = \frac{4 - 2i}{16 + 4} = \frac{4}{20} + \frac{2}{20}i = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i$

$z_6 = \frac{1 + i}{2 - i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i + 2i + i^2}{2^2 - i^2} = \frac{1 + 3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

Propriété

a) Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
b) Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Démonstration :
Conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique.

Exemple d'application :
Déterminons le nombre complexe z vérifiant $2z - 5 = 4i + z$ .On a donc :

$2z - 5 = 4i + z$ $\quad = 4i + 5$

$2z = 4i + z$

II. Représentation dans le plan complexe.

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

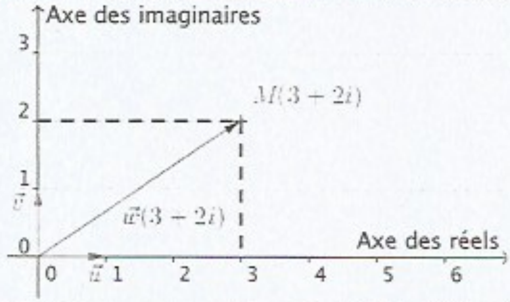
Définition

a et b sont deux nombres réels.

- A tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe le point M de coordonnées $(a;b)$ et le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a;b)$.

- A tout point M$(a;b)$ et à tout vecteur $\vec{w}$ $(a;b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé affixe du point M et affixe du vecteur $\vec{w}$. On note M(z) et $\vec{w}$ (z).

Exemples :
Le point M(3 ; 2) a pour affixe le nombre complexe $z = 3 + 2i$.
De même, le vecteur $\vec{w}$ *a pour affixe* $z = 3 + 2i$.



Propriété

M(z_M) et N(z_N) sont deux points du plan. $\vec{u}$ (z) et $\vec{v}$ (z') sont deux vecteurs du plan.

a) Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe $z_N - z_M$.

b) Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.

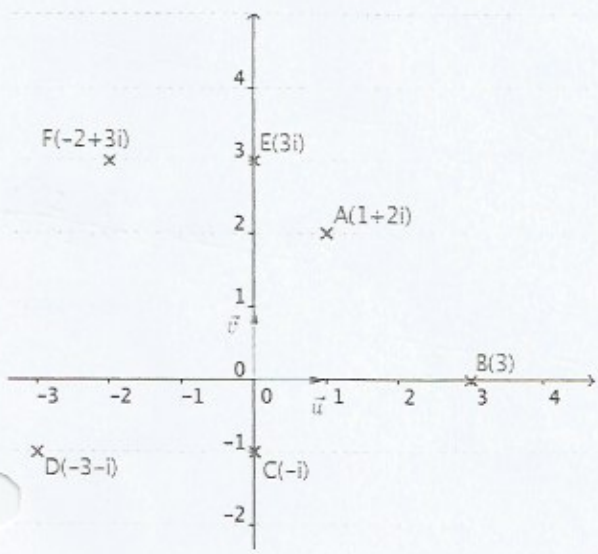
c) Le vecteur $k\vec{u}$, k réel, a pour affixe kz.

Démonstration :

M(ZM) N(ZN) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = -z_M + z_N = z_N - z_M$

$\overrightarrow{MN}$ a pour affixe $z_N - z_M$

Autres exemples :



l'affixe du $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A = 3 - (1+2i) = 2-2$

Rmq: un nombre réel pur est situé sur l'axe des absises. ex: B(3)
un nombre imaginaire pur est situé sur l'axe des ordonnées.

L'ensemble de nombres complexes est comparable à un monde à 2 dimensions

III. Conjugué d'un nombre complexe.

Définition

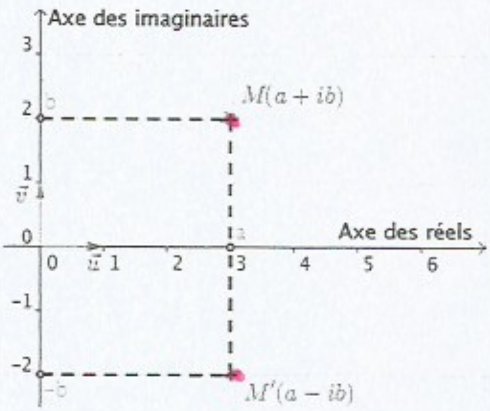
Soit un nombre complexe $z = a + ib$.

On appelle nombre complexe conjugué de z, le nombre, noté $\bar{z}$, égal à $a - ib$.

Exemples : $z_1 = 2+3i \quad \bar{z}_1 = 2-3i \quad z_2 = 17-6i \quad \bar{z}_2 = 17+6i$

Remarque :

Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes et n entier naturel non nul.

a) $\bar{\bar{z}} = z$ b) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ c) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

d) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ e) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$, $z \neq 0$ f) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$, $z' \neq 0$

Démonstrations :

b) $z = a+ib \quad z' = a'+ib'$

$z+z' = (a+a') + i(b+b')$

$\bar{z} = a-ib \quad \bar{z'} = a-ib'$

$\overline{z+z'} = (a+a') - i(b+b')$

$\bar{z} + \bar{z'} = a+a'-ib-ib'$

Donc $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

c) $z = a+ib \quad \bar{z} = a-ib$

$z' = a'+ib' \quad \bar{z'} = a'-ib'$

$\bar{z} \times \bar{z'} = (a-ib)(a'-ib') = aa'-bb' - i(a'b+ab')$

$z \times z' = (a+ib)(a'+ib') = aa'+bb' + i(a'b+ab')$

$\overline{z \times z'} = aa'-bb' - i(a'b+ab') = \bar{z} \times \bar{z'}$

d) Initialisation : $\overline{z^1} = (\bar{z})^1$ ok

Hérédité : On suppose $\exists k \,/\, (\overline{z^k}) = (\bar{z})^k$

alors $(\bar{z})^{k+1} = \bar{z} \times (\bar{z})^k = \bar{z} \times (\bar{z})^k = \overline{z \times z^k} = \overline{z^{k+1}}$

Propriété

♣ z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$ ♣ z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Démonstration :

* z réel implique $z = \bar{z}$.

* $z = \bar{z} \Rightarrow z - \bar{z} = 0$

$z - \bar{z} = a+ib-(a-ib) = 2bi$

$z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow 2bi = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

* $z = ib \Rightarrow \bar{z} = -ib \Rightarrow \bar{z} = -z$

* $z = -\bar{z} \Leftrightarrow a+ib = -a+ib \Leftrightarrow -a = a \Leftrightarrow a = 0$

Propriété

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$

Démonstration :

$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2+b^2$

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer le conjugué d'un nombre complexe :*

Déterminer le conjugué des nombres suivants et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$z_1 = (2-i)(i-5)$ $\qquad$ $z_2 = \dfrac{3+2i}{i}$

$z_1 = (2-i)(i-5) = 2i - 10 + i^2 + 5i = -9 + 7i$; $\bar{z}_1 = -9 - 7i$

$z_2 = \dfrac{3+2i}{i} = \dfrac{(3+2i) \times -i}{(i)(-i)} = \dfrac{-3i + 2i^2}{-i^2} = \dfrac{-3i-2}{-1} = 2 - 3i$ $\quad \bar{z}_2 = 2 + 3i$

IV. Equations du second degré dans C.

Définition

Soit a, b et c des réels avec $a \neq 0$.

On appelle discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété

- Si $\Delta > 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a une unique solution réelle : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Démonstrations :

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une équation dans C :*

Résoudre dans C les équations suivantes : a) $z^2 + 5 = 0$ $\qquad$ b) $z^2 + 3z + 4 = 0$

a) * $z^2 + 5 = 0$

$z^2 = -5$

$z = i\sqrt{5}$ ou $-i\sqrt{5}$

* $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 5 = -20$ $\quad \Delta < 0$ donc

l'équation $z^2 + 5 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$,

mais a deux solutions dans $\mathbb{C}$

$z_1 = \dfrac{-0 - i\sqrt{20}}{2 \times 1}$ et $z_2 = \dfrac{-0 + i\sqrt{20}}{2 \times 1}$

$z_1 = -i\sqrt{5}$ $\qquad$ $z_2 = i\sqrt{5}$

Nombres complexes (suite).

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

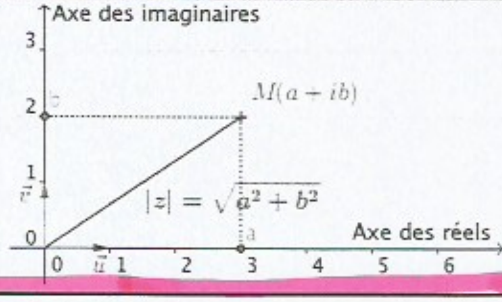
I. Module et argument d'un nombre complexe

1) Module

Définition

Soit un nombre complexe $z=a+ib$.

On appelle **module** de z, le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.



M est un point d'affixe z.
Alors le module de z est égal à la distance OM.
Dans un repère orthonormé, le théorème de Pythagore nous donne la formule.

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes.

☺ $|z|^2=z\bar{z}$ ☺ $|\bar{z}|=|z|$ ☺ $|-z|=|z|$

Démonstrations :

$z\bar{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2+iab-iab+b^2=a^2+b^2=(z)^2$

• $|z|^2=\bar{z}\bar{z}=\bar{z}z=z\bar{z}=|z|^2$ • $|\bar{z}|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$

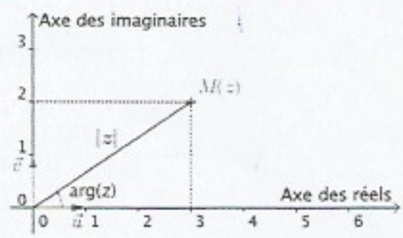
• $|-z|=\sqrt{(-a)^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$

2) Argument

Définition

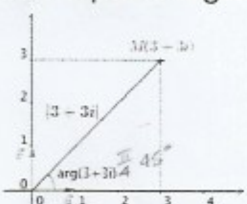
Soit un point M d'affixe z non nulle.

On appelle **argument** de z, notée $\arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$.



Remarque :

- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $\arg(z)+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. On notera $\arg(z)$ modulo 2π ou $\arg(z)[2\pi]$
- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ n'est pas défini.



Exemple :

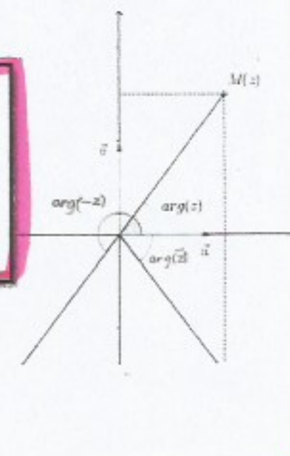
Soit $z=3+3i$. Alors $|z|=|3+3i|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ Et $\arg(z)=\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

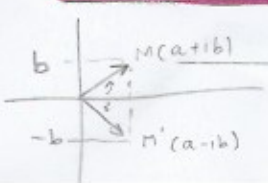
Propriété

Soit z un nombre complexe non nul.

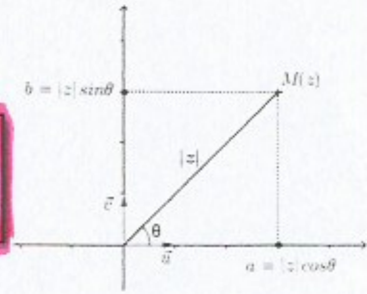
☺ z est un nombre réel $\Leftrightarrow \arg(z)=0[\pi]$ ☺ z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{2}[\pi]$

☺ $\arg(\bar{z})=-\arg(z)$ ☺ $\arg(-z)=\arg(z)+\pi$





II. Forme trigonométrique d'un nombre complexe



Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On pose : $\theta = \arg(z)$

On a alors : $a = |z|\cos\theta$ et $b = |z|\sin\theta$.

Remarque :

- $\frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1, donc il appartient au cercle trigonométrique.

Définition

On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta = \arg(z)$.

Exemple: Ecrire un nombre complexe sous sa forme trigonométrique

Ecrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous sa forme trigonométrique.

$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$ $\quad z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$ $\quad z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad |z| = 2$ $\quad \arg(z) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n entier naturel non nul.

☺ $|zz'| = |z||z'|$ ☺ $|z^n| = |z|^n$ ☺ $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ ☺ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

☺ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ ☺ $\arg(z^n) = n\arg(z)$ ☺ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$, $z \neq 0$ ☺ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

III. Forme exponentielle d'un nombre complexe

1) Définition

Posons $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.

On retrouve ainsi la même équation fonctionnelle que celle établie pour les exponentielles : $e^{\theta}e^{\theta'} = e^{\theta+\theta'}$.

Définition

Pour tout réel θ, on pose : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Remarque : $e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

Exemples :

Définition

Tout nombre complexe z non nul de moduler r et d'argument θ s'écrit sous sa forme exponentielle $z = r\,e^{i\theta}$.

☑ *Savoir-faire : Savoir passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement:*

1) Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

a) $z_1 = -2i$ b) $z_2 = -5$

2) Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

a) $z_3 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $z_4 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) Propriétés

Propriété

Pour tous réels θ et θ', pour tout entier naturel n non nul,

☺ $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ ☺ $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ☺ $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ ☺ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{-i(\theta-\theta')}$ ☺ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Remarque : La formule $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ s'appelle formule de *Moivre*.

IV. Applications à la géométrie

Propriété

A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

On a : ☺ $(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A)$ ☺ $AB = |z_B - z_A|$ ☺ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser les nombres complexes en géométrie:*

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = -2 - i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 2i$.

1) Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.

2) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

1) $AB = |z_B - z_A| = |1-2i-(-2-i)| = |3-i| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$

$AC = |z_C - z_A| = |-1+2i-(-2-i)| = |1+3i| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

2) $BC = |z_C - z_B| = |-1+2i-(1-2i)| = |-2+4i| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{20}$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ Donc ABC rectangle d'après la réciproque de th Pythagore