Probabilités conditionnelles.

I. Probabilités conditionnelles.

Définition

Soit A et B deux événements avec $p(A) \neq 0$. On appelle <u>probabilité conditionnelle de B sachant A</u>, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé.
Elle est notée $p_A(B)$ et est définie par : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

<u>Exemple :</u>

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement "Le résultat est un pique". Soit B l'événement "Le résultat est un roi".

$\frac{p(A\cap B)}{p(A)} = \frac{1/32}{1/4} = \frac{1}{8}$

$p(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ $\quad p(A \cap B) = \frac{1}{32}$

Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est : $p_A(B) = \frac{1}{8}$

Définition

Soit A et B deux événements avec $p(A) \neq 0$.

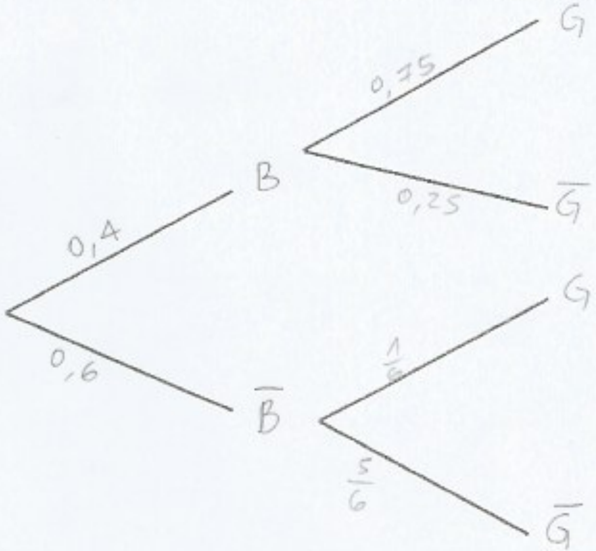
- $0 \leq p_A(B) \leq 1$
- $p_A(\bar{B}) = 1 - p_A(B)$
- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

<u>Exemple :</u>

II. Arbre pondéré.

<u>Exemple :</u>

Une urne contient 100 tickets, dont 40 tickets bleus et 60 tickets rouges. Sur chaque ticket, il est marqué soit "Gagné" ou soit "Perdu". Il est marqué Gagné sur 30 tickets bleus et sur 10 tickets rouges. On tire au hasard un ticket dans l'urne.
Soit B l'événement "On tire un ticket bleu". Soit G l'événement "On tire un ticket marqué Gagné"
On peut représenter l'expérience aléatoire par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) :



$p(B) = \frac{40}{100} = 0{,}4$ $\quad p(\bar{B}) = 0{,}6$

$p_B(G) = \frac{30}{40} = 0{,}75$ $\quad p_B(\bar{G}) = 0{,}25$

$p_{\bar{B}}(G) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ $\quad p_{\bar{B}}(G) = \frac{5}{6}$

Propriété

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

$P(B) + P(\overline{B}) = 1$

$P_B(G) + P_B(\overline{G}) = 1$

$P_{\overline{B}}(G) + P_{\overline{B}}(\overline{G}) = 1$

Propriété

La probabilité d'une extrémité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches composant ce chemin.

la probabilité d'obtenir un ticket gagnant et bleu est :

$P(B \cap G) = P(B) \times P_B(G) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$

Propriété

Formule des probabilités totales : La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacune de ces chemins.

$P(G) = P(B \cap G) + P(\overline{B} \cap G) = P(B) \times P_B(G) + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(G) = 0,4 \times 0,75 + 0,6 \times \frac{1}{6} = 0,4$

☑ ***D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010***

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

– si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;

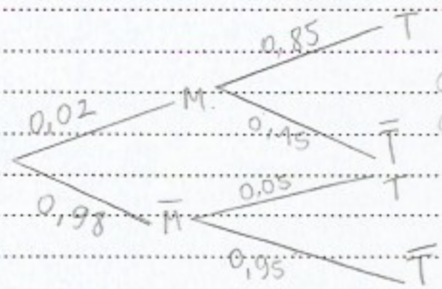
– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et« Avoir un test positif ».

Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?

Sachant que le test est ⊕, quelle est la probabilité que l'animal soit malade ?



M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$

$= P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T)$

$= 0,02 \times 0,85 + 0,98 \times 0,05 = 0,066$

$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = P_T(M) = \frac{0,02 \times 0,85}{0,066}$

$P_T(M) = 0,26$

III. Indépendance de deux événements.

Définition

On dit que deux évènements A et B de probabilité non nulle sont indépendants lorsque . $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Remarque : *On a également : A et B sont indépendants, si et seulement si.* $P_A(B) = P(B)$ *ou* $P_B(A) = P(A)$.

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Soit R l'événement "On tire un roi". Soit T l'événement "On tire un trèfle". Alors $R \cap T$ *est l'événement "On tire le roi de trèfle".*

$P(R \cap T) = \frac{1}{32}$ $P(R) = \frac{4}{32}$ $P(T) = \frac{8}{32}$ $P(R) \times P(T) = \frac{1}{32}$

Contre-exemple : On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.

$P(R \cap T) = \frac{1}{34}$ $P(R) = \frac{4}{34}$ $P(T) = \frac{8}{34}$ $P(R) \times P(T) = \frac{8}{282}$

Propriété

Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (exigible BAC ROC) :

voir p. 354

☑ *BAC S, Liban mai 2015*

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B. Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A. On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

2. **a.** Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

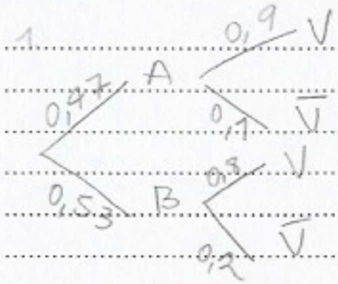
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.

4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants : 52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A.

*estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes. Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut- il croire en sa victoire ?

5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4. L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses. Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

1.



2 a) A et B constituent une partition de l'univers donc d'après la loi de probabilités totale

$P(V) = P(A\cap V) + P(B\cap V)$

$= P(A) \times P_A(V) + P(B) \times P_B(T)$

$= 0{,}47 \times 0{,}9 + 0{,}53 \times 0{,}8$

$= 0{,}847$

$P_V(A) = \dfrac{P(A\cap V)}{P(V)} = \dfrac{0{,}47 \times 0{,}9}{0{,}847} = 0{,}5$

3. E " vote pour A "

$P(E) = P(A\cap V) + P(B\cap \overline{V})$

$= P(A)\times P_A(V) + P(B)\times P_B(\overline{V})$

$= 0{,}47 \times 0{,}9 + 0{,}53 \times 0{,}2$

$= 0{,}529$