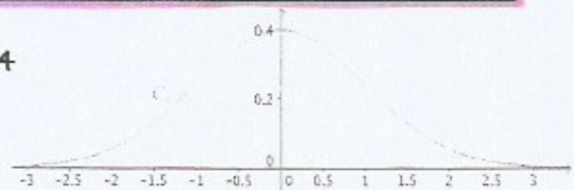
Lois normales.

I. Densité de probabilité de Laplace-Gauss.

Définition

On appelle fonction de Laplace-Gauss la fonction φ définie sur IR par$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$.

La fonction φ est continue, dérivable, strictement positive sur IR.
Elle est paire et admet en 0 un maximum égal á ...$1/\sqrt{2\pi} \approx 0,4$
Elle a pour limite ..0... en $+\infty$. et en $-\infty$
Sa représentation graphique s'appelle courbe de Gauss
Ou courbe en cloche.



Théorème (admis)

L'aire totale sous la courbe de Gauss est égale á...1.

II. Loi normale centrée réduite.

1) Définition.

Définition

La loi normale centrée réduite, notée $N(0\,;1)$, est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction φ définie sur IR par $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Remarque :
Il n'est pas possible de déterminer une forme explicite de primitives de la fonction densité de la loi normale centrée réduite.

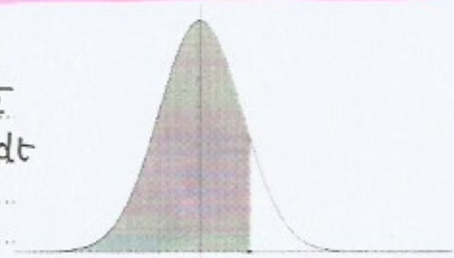
2) Calcul de probabilités.

Définition

Z étant une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, on pose pour tout x : $\phi(t) = P(Z \leq t)$

$\phi(t)$ est l'aire du domaine sous la courbe de Gauss á gauche de la droite ayant pour équation $x = t$.
$\phi(0) = 1/2$. ϕ est donc la primitive de φ tels que $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
$\Phi(a) = \int_{\infty}^{a} \varphi(t)\,dt = \Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} 1/\sqrt{2\pi}\; e^{-t^2/2}\,dt$

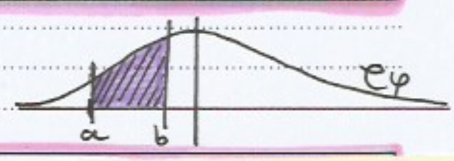
Rmq: $\int_{-\infty}^{0} 1/\sqrt{2\pi}\, e^{-0^2/2}\,dt = 1/2$



Théorème

Z étant une variable aléatoire qui suit la loi $N(0\,;1)$, pour tous $a \leq b$ on a : $P(a \leq Z \leq b) = \phi(b) - \phi(a)$

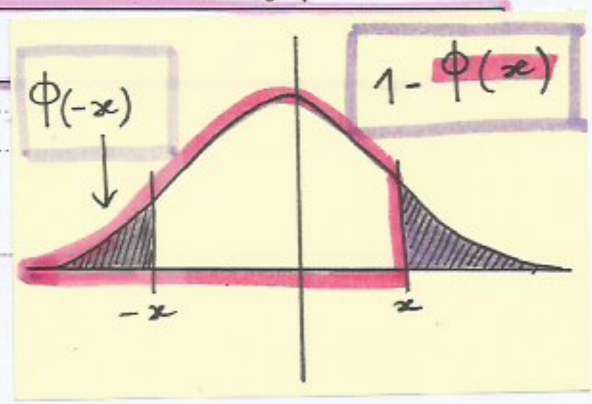
$P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{b} \varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} \varphi(t)\,dt$
$= \Phi(b) - \Phi(a)$



Théorème

Pour tout nombre réel x on a :$\phi(-x) = 1 - \phi(x)$

$\Phi(-x) = P(Z \leq -x)$ par symmetrie $P(Z \leq -x) = P(Z \geq x)$
Donc $P(Z \leq -x) = 1 - P(Z \leq x)$
Donc $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$



3) Espérance et variance.

Propriété

Z est une variable aléatoire qui suit la loi $N(0\,;1)$, alors $E(Z) =$ et $V(Z) =$.

Démonstration : pour l'espérance :

On admet que : $E(X) = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 t\,f(t)\,dt + \lim\limits_{y \to +\infty} \int_0^y t\,f(t)\,dt$

$\int_x^0 t \times (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-t^2/2}\,dt = (1/\sqrt{2\pi}) \int_x^0 t e^{-t^2/2}\,dt = (1/\sqrt{2\pi}) \left[-e^{-t^2/2}\right]_x^0$

$= (1/\sqrt{2\pi})\,(-1 + e^{-x^2/2})$ Donc $\int_{-\infty}^0 t\,\varphi(t)\,dt = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 t\,\varphi(x)\,dt = \lim\limits_{x \to -\infty} (1/\sqrt{2\pi})(-1 + e^{-x^2/2})$

$= -1/\sqrt{2\pi}$ On montre de même que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t\,\varphi(t)\,dx = 1/\sqrt{2\pi}$.

Donc $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,\varphi(t)\,dt = 0$

4) Intervalle centré de probabilité donnée.

Propriété

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$.
Pour tout $\alpha \in]0\,;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \le X \le u_\alpha) = 1-\alpha$ ..

Démonstration ROC (exigible BAC) :

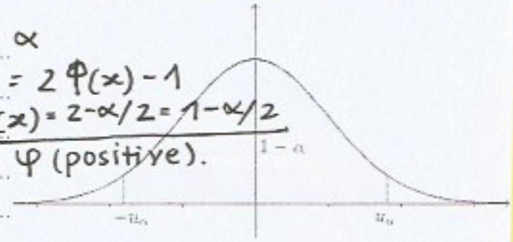
Soit $\alpha \in]0;1[$ cherchons x / $P(-x \le X \le x) = 1-\alpha$

$P(-x \le X \le x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$

Donc $P(-x \le X \le x) = 1-\alpha \iff 2\Phi(x) - 1 = 1-\alpha \iff \underline{\Phi(x) = 2-\alpha/2 = 1-\alpha/2}$

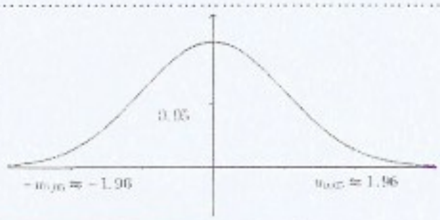
Φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est φ (positive).

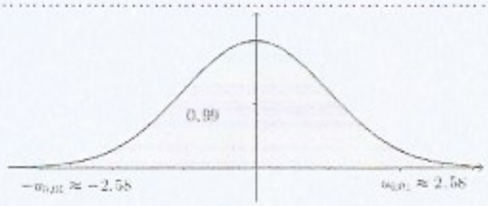
$\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to}$



Cas particulier :

$u_{0,05} \approx 1{,}96$ et $u_{0,01} \approx 2{,}58$





III. Lois normales cas général.

1) Définition

Définition

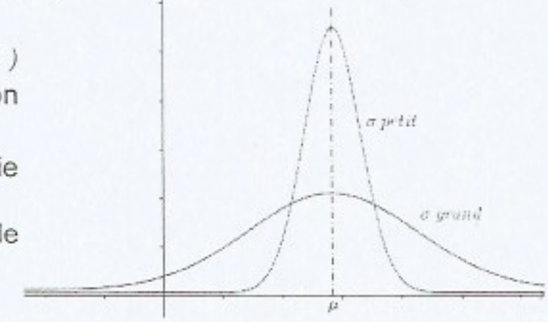
Soit un nombre réel μ et un nombre réel strictement positif σ. Dire qu'une variable aléatoire continue X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, notée $N(\mu\,;\sigma^2)$. signifie que la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$.

Ex : X suit $N(20\,;3^2) \iff Z = \dfrac{X-20}{3}$ suit $N(0;1)$

Remarques :

- La courbe représentative de la fonction densité de la loi $N(\mu\,;\sigma^2)$ est une *courbe en cloche* symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.
- La courbe est d'autant plus "resserrée" autour de son axe de symétrie que l'écart-type σ est petit.

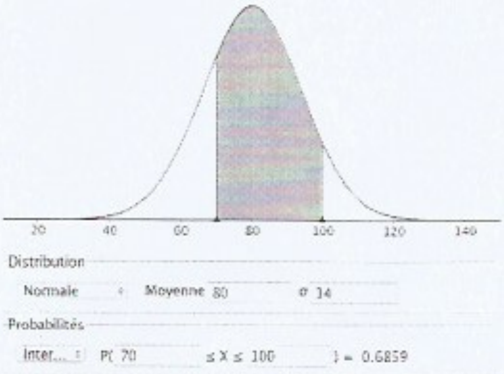
L'écart-type (ou la variance) est un caractère de dispersion autour de l'espérance qui est un caractère de position.



☑ *Savoir-faire :* Utiliser une calculatrice ou un logiciel pour calculer une probabilité avec une loi normale:

Une compagnie de transport possède un parc de 200 cars. On appelle X la variable aléatoire qui a un car choisi au hasard associe la distance journalière parcourue. On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(80;14^2\right)$.

Quelle est la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un car parcourt entre 70 et 100 km par jour ?



Avec une TI-83 Plus :
Taper sur les touches **"2nde"** et **"VAR/Distrib"** puis saisir **normalFRéq(70,100,80,14)**

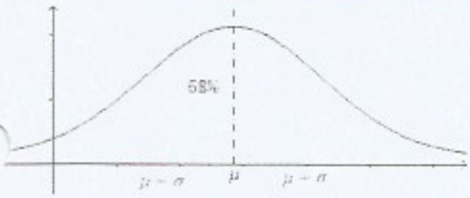
Avec une TI-84 Plus :
Taper sur les touches **"2ND"** et **"VARS/Distrib"** puis saisir **normalcdf(70,100,80,14)**

Avec une Casio Graph 35+ :
Taper sur la touche **"OPTN"**, puis dans l'ordre **"STAT"**, **"DIST"** **"NORM"** et **"Ncd"** puis saisir **NormCD(70,100,14,80)**

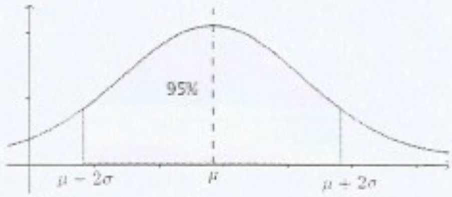
Avec GeoGebra :
Aller dans le menu "Calculs probabilités" et saisir les paramètres dans la fenêtre qui s'ouvre.

On a ainsi : $P(70 \leq X \leq 100) \approx 0,686$.
La probabilité qu'un car parcourt entre 70 et 100 km par jour est d'environ 0,686.

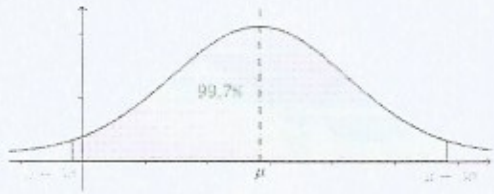
2) Intervalles à "1, 2 ou 3 sigmas"



$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0,683$



$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0,954$

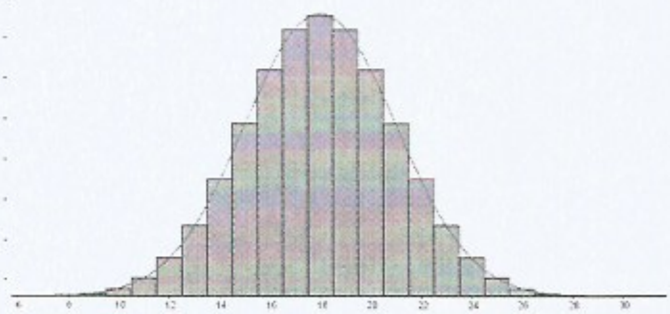


$P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \approx 0,997$

IV. Approximation normale d'une loi binomiale.

Théorème de Moivre-Laplace (admis)

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n\,;p)$. Soit $Z_n = \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$ la variable centrée réduite associée à X_n . Alors pour tous réels a et b tels que $a <$ b, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z \leqslant b) = \int_a^b \varphi(t)\,dt$



☑Exercice BAC : Amérique du Nord 2015:

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux gramme en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.
La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1. Calculer la probabilité de l'événement M : « la tablette est mise sur le marché ».
2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne 0,97.
   Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement « la tablette est mise sur le marché » soit égale à 0,97.

1. La variable aléatoire X suit la loi normale $N(100\,;\,1)$
Avec la calculatrice on trouve
$P(98 \le X \le 102) = 0{,}954499876$

```
normalcdf(98,102
,100,1)
           .954499876
```

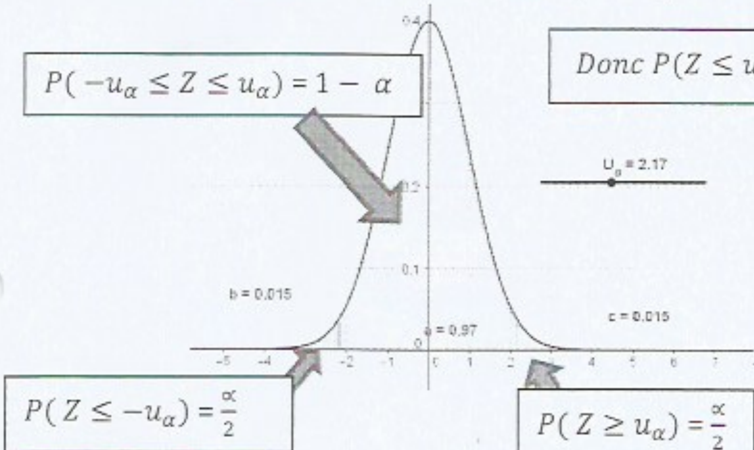
2. On cherche σ pour que $P(98 \le X \le 102) = 0{,}97$.
Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{X-100}{\sigma}$ alors Z suit la loi normale centrée et réduite $N(0\,;\,1)$.
Or $P(98 \le X \le 102) = P(98-100 \le X-100 \le 102-100)$

$$= P\left(\frac{98-100}{\sigma} \le \frac{X-100}{\sigma} \le \frac{102-100}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{-2}{\sigma} \le Z \le \frac{2}{\sigma}\right)$$

On cherche donc σ tel que $P\left(\frac{-2}{\sigma} \le Z \le \frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}97$.

Soit $\alpha = 0{,}03$, on cherche $u_{0,03}$. Or $P(-u_{0,03} \le Z \le u_{0,03}) = 0{,}97$. donc $P(Z \le u_{0,03}) = 0{,}985$.
$(P(-u_\alpha \le Z \le u_\alpha) = 1 - \alpha$ donc $P(Z \le u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.) par symétrie de la courbe.



Donc $P(Z \le u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Avec la calculatrice on trouve $u_{0,03} \approx 2{,}17$

```
invNorm(0.985,0,
1)
        2.170090375
```

Donc $\frac{2}{\sigma} \approx 2{,}17$ donc $\sigma \approx \frac{2}{2{,}17} = 0{,}9217$

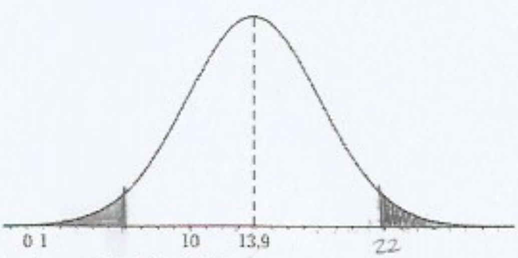
on peut vérifier que

```
normalcdf(98,102
,100,0.9217)
        .9699859456
```

☑Exercice BAC : Pondichéry 2016:

Partie A

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13{,}9$ et d'écart type σ.
La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous :



1. On sait que $p(T \geqslant 22) = 0{,}023$.
   En exploitant cette information :
   a. hachurer sur le graphique donné en annexe, deux domaines distincts dont l'aire est égale à 0,023 ;
   b. déterminer $P(5{,}8 \leqslant T \leqslant 22)$. Justifier le résultat. Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est 4,1.
2. On choisit un jeune en France au hasard.
   Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine.
   Arrondir au centième.

$P(5{,}8 \le T \le 22) =$
b) $1-(0{,}023 \times 2) = 0{,}954$
$P(13{,}9 - 2\sigma \le X \le 13{,}9 + 2\sigma) = 0{,}954$
$P(5{,}8 \le X < 22) = 0{,}954$
$13{,}9 - 2\sigma = 5{,}8 \qquad 2\sigma = 13{,}9 - 5{,}8$
$= 8{,}1$
$\sigma = 4{,}05$
$13{,}9 + 2\sigma = 22 \qquad -2\sigma = 13{,}9 - 22$
$2\sigma = 8{,}1$
$\sigma = 4{,}05$
2)