Ensemble de Nombres

I. L'ensemble des nombres entiers $\mathbb{N}$

Définition : un nombre entier est un nombre qui peut s'écrire sans virgule

Exemple : 3 - 4 - 125 - 2×10^5 - $\sqrt{25}$

$\mathbb{N}$ a un plus petit element qui est 0.
$\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand element.

Démonstration : On suppose que $\mathbb{N}$ a un plus grand element a.
Alors a + 1 est aussi un entier naturel et
$a + 1 > a$
Ce qui est absurde donc $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand element.

17 est un nombre entier ($17 \in \mathbb{N}$)
$-5 \notin \mathbb{N}$ ("$\in$" appartient à)

II. L'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$

Définition : l'ensemble des nombres entiers relatifs est composé des nombres entiers naturels et de leurs opposés.

Exemple : $-3 \in \mathbb{Z}$; $-5 \in \mathbb{Z}$; $12 \in \mathbb{Z}$

Tout nombre entier naturel appartient à l'ensemble des nombres entiers relatifs.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ("$\subset$" est inclus dans)

$3{,}5 \notin \mathbb{Z}$

III. L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$

Définition : un nombre décimal est un nombre opposé d'une partie entier et d'une partie décimale finie
(donc on peut les chiffres non nuls)

Exemple : $3,5 \in \mathbb{D}$; $10,21 \in \mathbb{D}$; $27 \in \mathbb{D}$;
$-13 \times 10^{-3} \in \mathbb{D}$.

Propriété : Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme $a \times 10^n$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$

Exemple :
- $13,2 = 132 \times 10^{-1}$
- $0,05 = -5 \times 10^{-2}$
- $1,23456789 = 123456789 \times 10^{-8}$

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$
- $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

IV. L'ensemble de nombres racionnels $\mathbb{Q}$

Définitions : un nombre racionnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$.

Exemple : $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $3 = \frac{3}{1} \in \mathbb{Q}$; $-6 = \frac{-6}{1} \in \mathbb{Q}$.
$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} \in \mathbb{Q}$; $13,25 = \frac{1325}{100} \in \mathbb{Q}$

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Pendant très longtemps $\mathbb{Q}$ a été considéré comme le plus grand ensemble de nombres. M^r Pythagore a essairé de trouver 2 nombres p et q tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

On suppose $\exists\, p, q \,/\, \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ fraction irréductible.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q2$

p^2 est pair donc p est pair donc $\exists\, p' /$ $p = 2p'$

Donc $p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow (2p')^2 = 2q^2 \Rightarrow 4'^2 = 2q^2$

Donc $2p'^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ est pair donc q est pair

Donc $\exists\, q' \,/\, q = 2q'$ Donc $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible ce qui est donc absurde. (contradictoire à l'hypothèse).

Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Connecteur logique :

$\exists$ il existe $\Rightarrow$ implique

$\forall$ pour tous $\Leftrightarrow$ est équivalent à

/ tel que

V. Ensemble de nombres réels $\mathbb{R}$

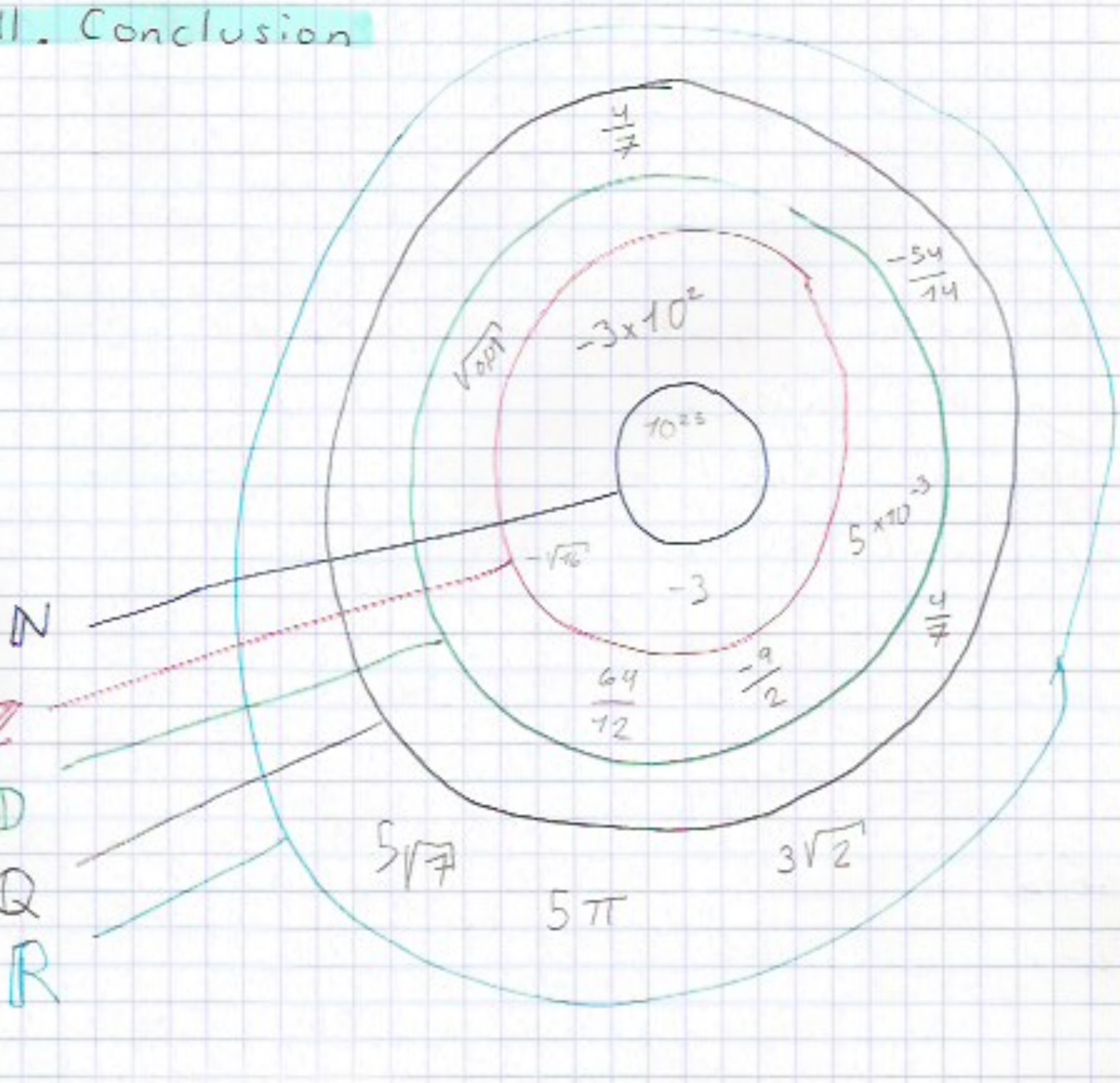
Définitions : L'ensemble de nombres réels est l'ensemble de tous les nombres que les élèves connaissent en 2e.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

VI. Ensemble des nombres complets

Un ensemble de nombres encore plus grands que $\mathbb{R}$ au programme de Terminale S.

VII. Conclusion



VIII. Application à la logique

Vrai ou faux

* Si un nombre appartient à $\mathbb{Z}$, alors il appartient à $\mathbb{Q}$.

$\forall x \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Q}$

car $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Donc tout nombre de $\mathbb{Z}$ appartient à $\mathbb{Q}$.

Vrai

* Tout nombre appartenant à $\mathbb{Q}$ appartient à $\mathbb{D}$.

Faux

Contrexemple : $\frac{1}{3}$ appartient à $\mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3}$ n'appartient pas à $\mathbb{D}$, donc $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{D}$

Un contrexemple suffit pour prouver qu'une affirmation est fausse.
Un exemple ne suffit pas pour prouver qu'une affirmation est vraie.

* Tout nombre décimale peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, donc tout nombre décimale peut s'écrire sous la forme d'une fraction, parce que tout nombre décimale est un nombre rationnel.