Fonctions de référence.

I. Sens de variation d'une fonction.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Dire que f est croissante sur I (respectivement strictement croissante sur I) signifie que pour tous réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (respectivement si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$).

- Dire que f est décroissante sur I (respectivement strictement décroissante sur I) signifie que pour tous réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$ (respectivement si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$).

- Dire que f est constante sur I signifie que pour tous réels a et b de I : $f(a) = f(b)$.

- Dire que f est monotone sur I signifie que f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I

Remarques:

- *On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre. Les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents.*
- *On dit qu'une fonction décroissante renverse l'ordre. Les images sont rangées dans l'ordre contraire des antécédents.*
- *Une fonction constante sur I peut être considérée comme croissante et décroissante sur I.*

II. La fonction carrée.

Définition

La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Sens de variations

La fonction carré est strictement décroisante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$

Démonstration :

Soit a et b appartenant à $]-\infty;0]$
tel que $a<b$
Cherchons le signes de $f(b)-f(a)$
$f(b)-f(a) = b^2 - a^2 = (a+b)(a-b)$

$a+b<0$
$b-a>0$
Donc $f(b)-f(a)<0$

Donc $f(b)<f(a)$
Donc f est decroissante sur $]-\infty;0]$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	↘	0	↗

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signes de f	$+$	0	$+$

Remarques :

On retrouve fait qu'un carré de nombre réel est toujours positif, que les carrés de deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que ces nombres. C_f est une parabole tournée vers le haut qui a pour sommet l'origine du repère.

III. La fonction inverse.

Définition

La fonction inverse est la fonction i définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $i(x)=\frac{1}{x}$

Sens de variations

La fonction i est décroissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$

Démonstration :

Soit a et b ∈ à $]-\infty;0[$ tel que $a<b$

Cherchons le signe de $i(b)-i(a)$

$i(b)-i(a)=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$

$a-b<0$ $ab>0$

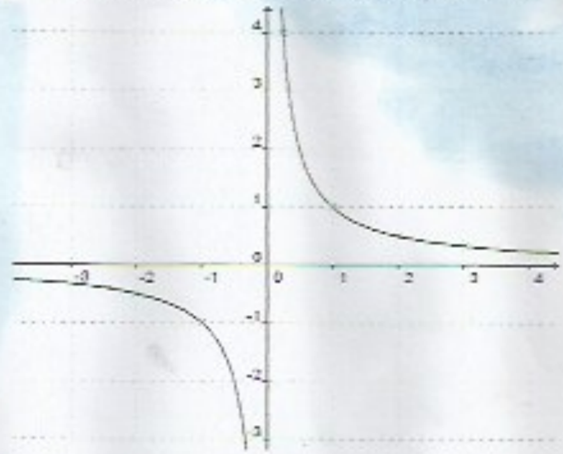
Donc $i(b)-i(a)<0$

Donc $i(b)<i(a)$

Donc i est décroissante sur $]-\infty;0[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de i	↘	||	↘

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signes de i	$-$	||	$+$



Remarques :

C_i s'appelle une hyperbole, elle est symétrique par rapport à l'origine du repère

IV. La fonction racine carrée.

Définition

La fonction racine carrée est la fonction r définie sur $]-\infty;0]$ par $r(x)=\sqrt{x}$

Sens de variations

La fonction

Démonstration (exigible) :

Soit a et b ∈ à $[0;+\infty[$ / $a<b$

Cherchons le signes de $r(b)-r(a)$

$r(b)-r(a)=\sqrt{b}-\sqrt{a}$

$=(\sqrt{b}-\sqrt{a})\times\frac{(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$

$=\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$

$b-a>0$

$\sqrt{b}+\sqrt{a}>0$

Donc $r(b)-r(a)>0$

$r(b)>r(a)$

Donc r est croissante sur $[0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
Variations de r	0 ↗	

x	0	$-\infty$
signes de r	0	$+$

IV. La fonction valeur absolue.

1) Valeur absolue d'un nombre

Définition

La valeur absolue d'un nombre A est égal au nombre A si A est positif, et au nombre –A si A est négatif.

La valeur absolue de A se note $|A|$.

Exemples :

$|5| = 5$; $|-3| = 3$; $|0| = 0$; $|28| = 28$; $|-35| = 35$

Propriété

Soit x et y deux nombres réels.

1) $|x| \geq 0$ 2) $|-x| = |x|$ 3) $\sqrt{x^2} = |x|$ 4) $|x| = 0$ équivaut à $x = 0$

5) $|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $x = -y$ 6) $|xy| = |x| \times |y|$ 7) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ pour $y \neq 0$

Exemples :

• $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3)$

Si $x < 0$ $\sqrt{x^2} = -x$

2) Distance et valeur absolue

Définition

Soit a et b deux nombres réels. Sur une droite graduée munie d'un repère $(O, \vec{i})$, la distance entre les points A et B d'abscisses respectives les nombres a et b
est le nombre |a – b|.
Ce nombre s'appelle aussi la distance entre les réels a et b et se note d(a ; b).

Exemple :Calculer la distance entre les nombres -1,5 et 4.

$d(-1,5 ; 4) = |-1,5 - 4| = |-5,5| = 5,5$

Propriété (inégalité triangulaire)

Soit x et y deux nombres réels. On a : $|x + y| \leq |x| + |y|$

Démonstration :

Dans un repère $(O, \vec{i})$, soit A et B deux points d'abscisses respectives x et $-y$.

$AB = |x - (-y)| = |x + y|$ $AO = |x|$ $OB = |-y| = |y|$ $AB \leq AO + OB$

Donc $|x + y| \leq |x| + |y|$

3) Fonction valeur absolue

Définition

La fonction valeur absolue est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

Remarque :

- Si $x \geq 0$, $f(x) = x$ donc $\mathcal{C}_f$ est confondue avec la droite $y = x$.
- Si $x < 0$, $f(x) = -x$ donc $\mathcal{C}_f$ confondue avec la droite $y = -x$

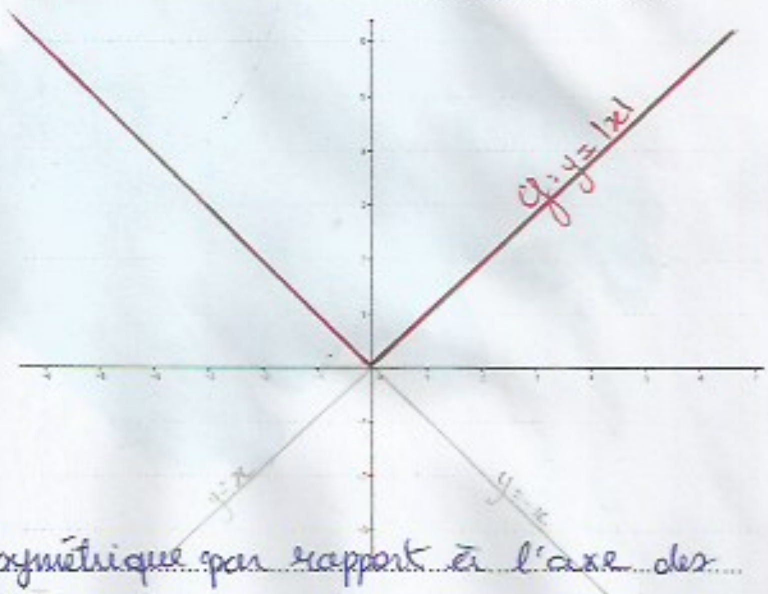
Sens de variations

La fonction valeur absolue est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et elle est croissante sur $[0 ; +\infty[$

Démonstration :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	↘	0	↗

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signes de f	$+$	0	$+$



Remarques :

car $|x| = |-x|$, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnée.

IV. Position relative de coubes.

Propriété

- Si $0 \leq x \leq 1$, alors $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$ - Si $x \geq 1$, alors $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

Démonstration (exigible) :

Dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on appelle C_r, C_f et C_c les courbes représentatives respectives des fonctions r, f et c telles que : $r(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x$, $c(x) = x^2$.

* Comparons $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_c$.

Etudions les signes de $c(x) - f(x)$

$c(x) - f(x) = x^2 - x$

On pose $(E) : x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$S(E) = \{0 ; 1\}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signes de $x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc si $x > 1$ $x^2 - x > 0$ Donc $x^2 > x$

si $0 < x < 1$ $x^2 - x < 0$ Donc $x^2 < x$

Comparons x et $\sqrt{x}$

$x-\sqrt{x} = (x-\sqrt{x}) \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ car $x>0$

$= \frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}$ $x>0$ Donc $x+\sqrt{x}>0$

Si $0<x<1$ $x^2<x$ donc $x^2-x<0$ Donc $x-\sqrt{x}<0$ Donc $x<\sqrt{x}$

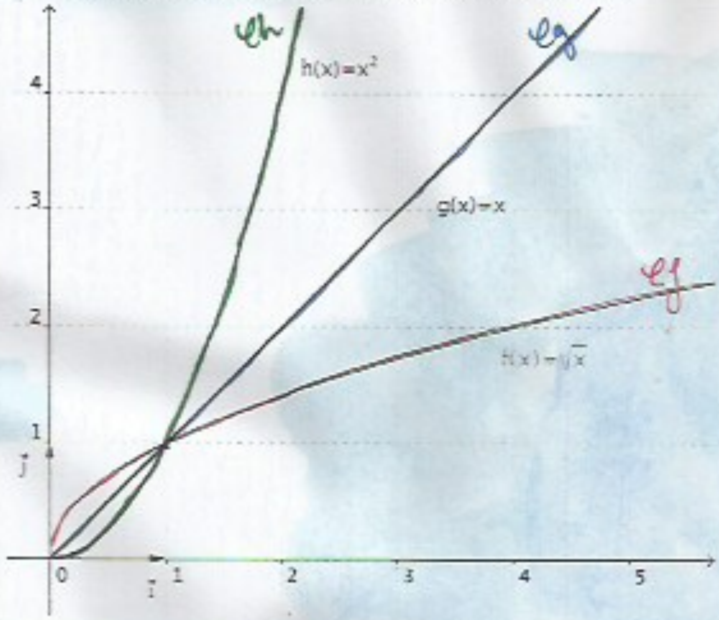
Si $x>1$ $x^2>x$ donc $x^2-x>0$ Donc $x-\sqrt{x}>0$ Donc $x>\sqrt{x}$

$\boxed{\begin{array}{ll} * \text{ Si } 0<x<1 & x^2<x<\sqrt{x} \\ \times \text{ Si } x>1 & \sqrt{x}<x<x^2 \end{array}}$

Propriété

Sur $]0;1[$, C_f est au-dessus de C_g qui est au-dessus de C_h.

Sur $]1;+\infty[$, C_f est en dessous de C_g qui est en dessous de C_h.



Remarques :

Les 3 courbes sont concourantes en 2 points $(0;0)$ et $(1;1)$.

☑ Savoir faire : Savoir étudier la position relative de deux courbes :

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2+8x-11$ et $g(x)=x-1$.

Etudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.

Etudions le signe de $f(x)-g(x)$

$f(x)-g(x) = -x^2+8x-11-(x-1)$

$= -x^2+7x-10$

$\Delta = b^2-4ac$

$= 7^2-4\times(-1)\times(-10)$

$= 9$

$x_1 = 2$ $x_2 = 5$

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
Signe de $f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc C_f est au dessus de C_g sur $[2;5]$

C_f est en dessous de C_g sur $]-\infty;2] \cup [5;+\infty[$

C_f et C_g ont 2 points d'intersection

$(2;1)$ et $(5;4)$