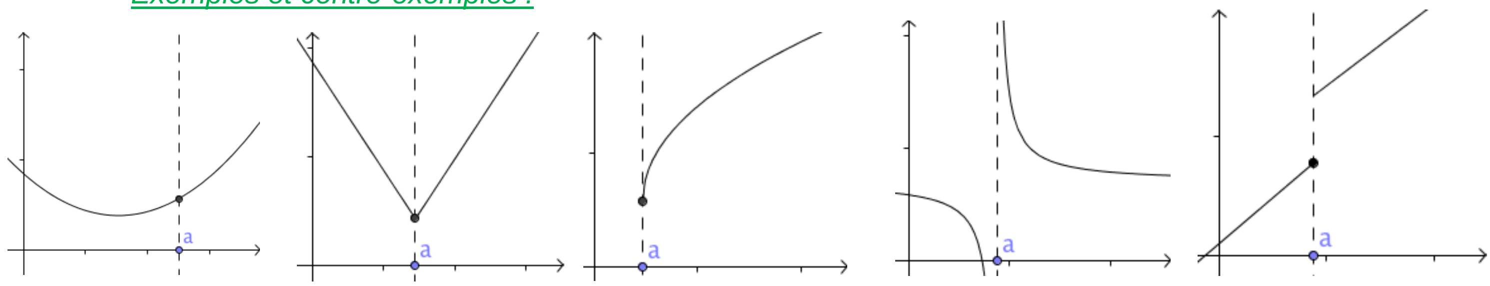
Continuité.

I. Fonctions continues.

Exemples et contre-exemples :



……

……

Définition

Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I contenant un réel *a*.

- *f* est continue en *a* si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- *f* est continue sur I si *f* est continue en tout point de I.

Exemples :

- Les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

Remarque :

Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Théorème (admis)

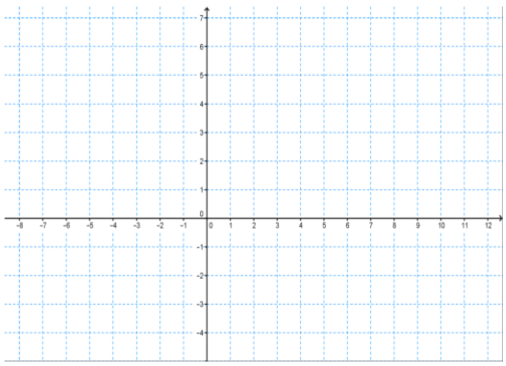
Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

☑ Savoir-faire : Savoir étudier la continuité d'une fonction.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

par : $\begin{cases} f(x) = x + 5 \; si \; x < -2 \\ f(x) = -x \quad si \; -2 \leq x \leq 0 \\ f(x) = x^2 \; si \; 0 < x \end{cases}$

La fonction *f* est-elle continue sur $\mathbb{R}$?



……

……

……

……

……

……

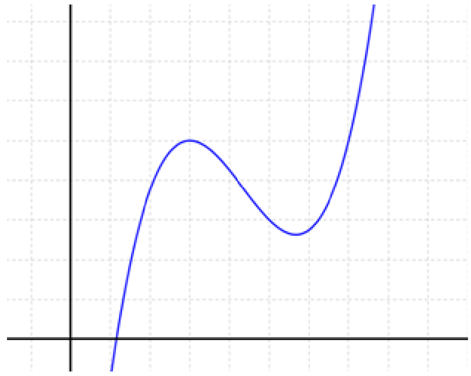
……

II. Théorème des valeurs intermédiaires.

Théoreme des valeurs intermediaires (admis)

On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$

Conséquence :
Dans ces conditions, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a ; b]$.
Cas particuliers :
- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a ; b]$ alors le réel c est unique.
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=0$.



Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$. *Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,* l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

☑*Savoir faire : Savoir prouver l'existence d'au moins une solution d'une équation de la forme $f(x)=k$:*

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=x^3-9x^2+26x-25$.

Montrer que l'équation (E) : $f(x)=-1$ *admet au moins une solution sur [1 ; 5].*

....

....

....

....

Remarque 1 :
La continuité de la fonction f est une hypothèse essentielle du théorème. Si la fonction f n'est pas continue, il est possible que pour un réel k compris entre f(a) et f(b), il n'existe aucun réel c compris entre a et b tel que f(c) = k.

Théorème des valeurs intermédiaires et solution unique

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone *sur un intervalle* $[a ; b]$. *Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,* l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

☑*Savoir faire : Savoir prouver l'existence d'une unique solution d'une équation de la forme $f(x)=k$:*

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=x^3+x$.

Montrer que l'équation (E) : $f(x)=5$ admet une unique solution sur [1 ; 2].

....

....

....

....

....

....

....

....

Remarque :
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$, sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

☑*Savoir faire : Savoir prouver l'existence d'une unique solution sur un intervalle non borné :*

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1) Etablir le tableau de variations de f définie sur IR.

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

x	
Variations de f	

2) Montrer que 1 est une solution de l'équation (E) : $f(x)= 0$.

……

3) Montrer que l'équation (E) : $f(x)= 0$ admet une unique solution α sur [2 ; +∞[.

……
……
……
……

3) Montrer que l'équation (E) : $f(x)= 0$ admet une unique solution β sur] -∞ ; 0 [.

……
……
……
……

4) En déduire le tableau de signes de $f(x)$.

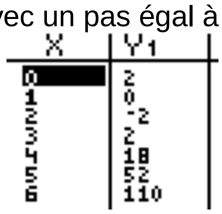
x	
Signes de $f(x)$	

☑*Savoir faire : Savoir utiliser la calculatrice pour donner un encadrement d'une solution :*

4) Déterminer un encadrement de α et de β à 10^{-2} près.

A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

Avec un pas égal à 1

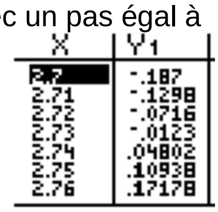


La solution est comprise entre ….

Avec un pas égal à 0,1

La solution est comprise entre …. et

Avec un pas égal à 0,01



La solution est comprise entre …. et

De même pour β, on trouve …… < β < ……….

☑*Savoir-faire : Savoir utiliser un algorithme pour donner un encadrement d'une solution :*

……
……