Continuité.

I. Fonctions continues.

Exemples et contre-exemples :

Comme dirait les ES, on peut tracer les 3 premières sans léver le stylo ce qui n'est pas le cas pour les deux dernières.

Définition

> Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.
>
> - f est <u>continue en a</u> si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
>
> - f est <u>continue sur I</u> si f est continue en tout point de I.

Exemples :

- *Les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.*
- *Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.*
- *La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.*
- *La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.*

Remarque :

Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

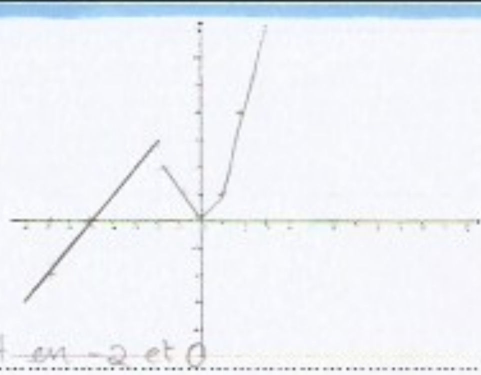
Théorème (admis)

> Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

☑ *Savoir-faire : Savoir étudier la continuité d'une fonction.*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

par : $\begin{cases} f(x) = x+5 \text{ si } x < -2 \\ f(x) = -x \text{ si } -2 \le x \le 0 \\ f(x) = x^2 \text{ si } 0 < x \end{cases}$



La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Les points de doute sur la continuité sont ~~en -2~~ et 0

* continuité en 0	* continuité en -2
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 = 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} -x = -(-2) = 2$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -x = 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} x+5 = 3$
Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$	Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x)$
Donc f est continue en 0	Donc f n'est pas continue en -2

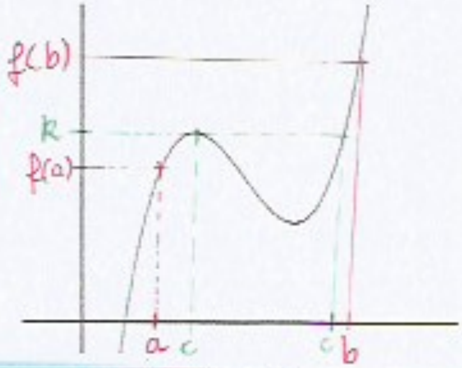
II. Théorème des valeurs intermédiaires.

Théoreme des valeurs intermediaires (admis)

On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

Conséquence :
Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Cas particuliers :
- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ alors le réel c est unique.
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.



Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. *Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,* l'équation $f(x)= k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

☑Savoir faire : Savoir prouver l'existence d'au moins une solution d'une équation de la forme $f(x)= k$:

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 25$.

Montrer que l'équation $(E) : f(x)= -1$ admet au moins une solution sur $[\ 1 : 5\ ]$.

• $f(1) = -7$ $f(5) = 5$
Donc $-1 \in [f(1) ; f(5)]$ De plus f est continue sur $[1;5]$. Donc d'après le théoreme des valeurs intermediaires l'équation $f(x) = -1$ admet au moins une solution α appartenant à $[1;5]$

Remarque 1 :
La continuité de la fonction f est une hypothèse essentielle du théorème. Si la fonction f n'est pas continue, il est possible que pour un réel k compris entre f(a) et f(b), il n'existe aucun réel c compris entre a et b tel que f(c) = k.

Théorème des valeurs intermédiaires et solution unique

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone *sur un intervalle* $[a\ ;\ b]$. *Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,* l'équation $f(x)= k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

☑Savoir faire : Savoir prouver l'existence d'une unique solution d'une équation de la forme $f(x)= k$:

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 + x$.

Montrer que l'équation $(E) : f(x)= 5$ admet une unique solution sur $[\ 1 : 2\ ]$.

$f(x) = x^3 + x$
f est derivable $f'(x) = 3x^2 + 1$ • $f(1) = 2$ • $f(2) = 10$ Donc $5 \in [f(1) ; f(2)]$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signes $f'(x)$	+
variations f	$-\infty$ ↗ $+\infty$

De plus f est continue et strictement croissante sur $[1;2]$ Donc d'après le Theoréme des valeurs intermediaires
l'équation $f(x) = 5$ a une unique solution α qui appartient à $[1;2]$