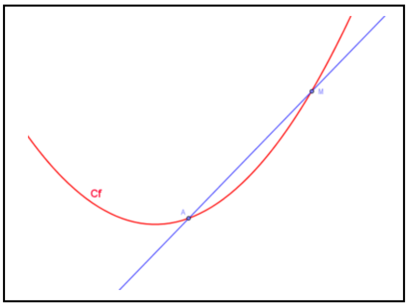
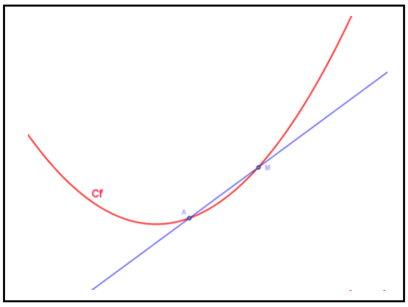
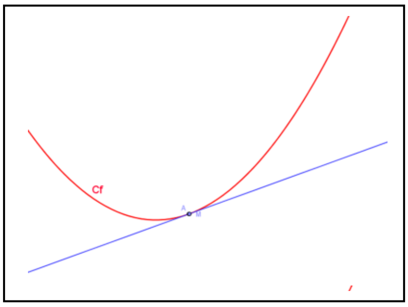
Dérivation.

I. Tangente à une courbe.

Introduction :
On considère la courbe représentative d'une fonction f, et A, un point de cette courbe.
On prend un autre point M de C_f, on trace la droite (AM) et on rapproche le point M de A.







Définition

Soit f une fonction, C_f sa courbe et A (a ; f (a)) et M(x ; f (x))deux points de C_f.
On appelle tangente en A à la courbe C_f la droite notée T_A obtenue lorsque M se rapproche de A.

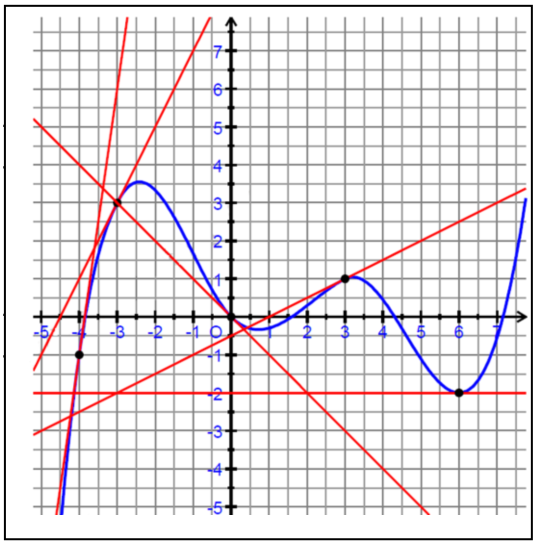
II. Nombre dérivé.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel appartenant à I. On appelle nombre dérivé de f en a le coefficient directeur de la tangente T_A à la courbe C_f au point A (a ; f (a)). On note ce nombre $f'(a)$.

☑*Savoir faire : Savoir déterminer un nombre dérivé par lecture graphique :*

On donne ci contre la courbe représentative C_f d'une fonction f ainsi que certaines de ses tangentes.



1) Détermine par lecture graphique $f(-4)$; $f(-3)$; $f(0)$; $f(3)$ et $f(6)$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

2) Détermine par lecture graphique $f'(-4)$; $f'(-3)$; $f'(0)$; $f'(3)$ et $f'(6)$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

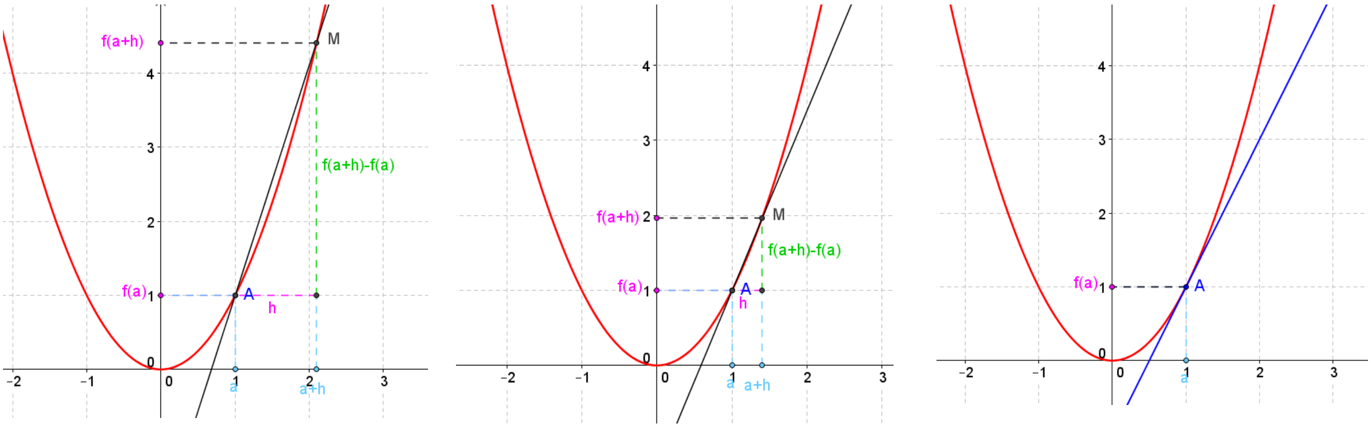
3) Détermine l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3.

……………………………………………………………………………………………

4) Dresse le tableau de variations de la fonction f.

x	
Variations de $f(x)$	

⊗ Calcul d'un nombre dérivé



Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit un réel a appartenant à I.
Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$, avec $h \neq 0$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel appartenant à I. On dit que la fonction f est <u>dérivable</u> en a si $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe, et on a : $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

☑Savoir-faire : Savoir déterminer un nombre dérivé par le calcul :

1) Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-3$. Calculer $f'(2)$.

....

....

....

....

....

....

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=|x-5|$. La fonction g est-elle dérivable en $x=5$?

....

....

....

....

....

....

☑Savoir-faire : Savoir déterminer l'équation d'une tangente á une courbe:

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-3$.

Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

....

....

....

....

Propriété

Si f est dérivable en a, la courbe C_f admet au point A $(a ; f(a))$ une **tangente** T_A qui a pour équation :
$y = f'(a)\times(x-a)+f(a)$.

Démonstration :

……
……
……
……
……

III. Fonction dérivée.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. *Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a.* *Pour* $h\neq 0$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}=\dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=2a+h$

donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}2a+h=2a$ *Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à 2a.On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f ' dont l'expression est* $f'(x)=2x$.
Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I. Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'.

Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$			
$f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$			
$f(x)=x^2$			
$f(x)=x^n$ $n\geq 1$ entier			
$f(x)=\dfrac{1}{x}$			
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $n\geq 1$ entier			
$f(x)=\sqrt{x}$			

exemples :

……
……
……

Démonstration pour la fonction inverse :

....

....

....

....

IV. Opération sur les fonctions dérivées.

Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	
ku est dérivable sur I, où k est une constante	
uv est dérivable sur I	
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	

Démonstration pour la fonction le produit :

....

....

....

....

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir dériver une fonction polynôme :*
Détermine les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

....

....

....

....

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir dériver une fonction rationnelle :*

....

....

....

....

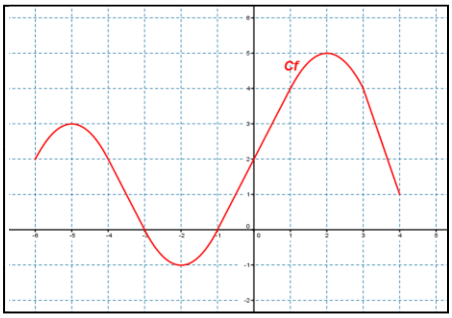
....

....

V. Fonction dérivée et sens de variation.

☑*Savoir faire : Savoir déterminer graphiquement le signe d'une dérivée :*

On donne ci contre la courbe représentative C_f d'une fonction f.



1) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

♦ $f(x) = 0$.

....

....

♦ $f'(x) = 0$.

....

....

Etablir le tableau de signes de f.

x	
Signes de $f(x)$	

Etablir le tableau se signes de f'

x	
Signes de $f'(x)$	

Etablir le tableau de variations de f.

x	
Signes de $f(x)$	

Théoreme (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

☑*Savoir-faire : Savoir étudier une fonction polynôme du 3° degré :*

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$.

1) Déterminer $f'(x)$.

....

....

2) Déterminer le signes de $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f.

....

....

....

....

....

....

x	

....

....

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_A à C_f au point A (1 ; -1).

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir étudier une fonction rationnelle :*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

....

....

VII. Dérivées de fonctions composées.

1) Dérivée de la fonction : $x \to \sqrt{u(x)}$

Propriété

u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $.f'(x) = \text{———}$

Démonstration :

....

....

....

Exemple :

....

....

2) Dérivée de la fonction $x \mapsto (u(x))^n$

Propriété

n est un entier relatif non nul. u est une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I dans le cas où n est négatif. Alors la fonction f définie sur I par $f(x) =$ est dérivable sur I et on a : $f'(x) =$.

Démonstration par récurrence :

- Initialisation : $f'(x) = u'(x) = 1 \times u'(x) \times (u(x))^{1-1}$ La propriété est donc vraie pour $n = 1$.
- Hérédité :
  - Hypothèse de récurrence :
    Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $(u^k)' = k u' u^{k-1}$.
  - Démontrons que : La propriété est vraie au rang k+1 : $(u^{k+1})' = (k+1) u' u^k$.

....

....

Exemple :

....

....

3) Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$

Propriété

a et b sont deux nombres réels. f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction g définie sur I par $g(x) = f(ax+b)$ est dérivable sur tout intervalle J tel que pour tout $x \in J$, $ax+b \in I$ et on a : $g'(x) = af'(ax+b)$.

Exemples :

....

....

....

4) Formules de dérivation sur les fonctions composées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$	
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	Si $n < 0$, $u(x) \neq 0$	
$f(ax+b)$	f dérivable	$af'(ax+b)$