Dérivation.

I. Tangente à une courbe.

Introduction :

On considère la courbe représentative d'une fonction f, et A, un point de cette courbe.

On prend un autre point M de C_f, on trace la droite (AM) et on rapproche le point M de A.

Définition

Soit f une fonction, C_f sa courbe et A (a ; $f(a)$) et M(x ; $f(x)$)deux points de C_f.

On appelle tangente en A à la courbe C_f la droite notée T_A obtenue lorsque M se rapproche de A.

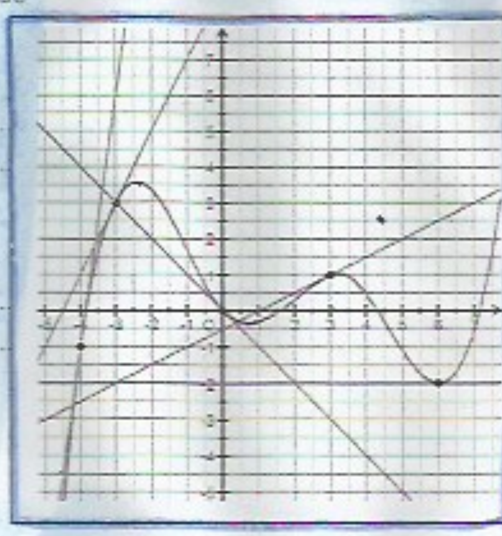
II. Nombre dérivé.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel appartenant à I. On appelle nombre dérivé de f en a le coefficient directeur de la tangente T_A à la courbe C_f au point A (a ; $f(a)$). On note ce nombre $f'(a)$.

☑*Savoir faire : Savoir déterminer un nombre dérivé par lecture graphique :*

On donne ci contre la courbe représentative C_f d'une fonction f ainsi que certaines de ses tangentes.



1) Détermine par lecture graphique $f(-4)$; $f(-3)$; $f(0)$; $f(3)$ et $f(6)$.

$f(-4) = -1$; $f(-3) = 3$; $f(0) = 0$; $f(3) = 1$; $f(6) = -2$

2) Détermine par lecture graphique $f'(-4)$; $f'(-3)$; $f'(0)$; $f'(3)$ et $f'(6)$.

$f'(-4) = 8$; $f'(-3) = 2$; $f'(0) = -1$; $f'(3) = 0{,}5$; $f'(6) = 0$

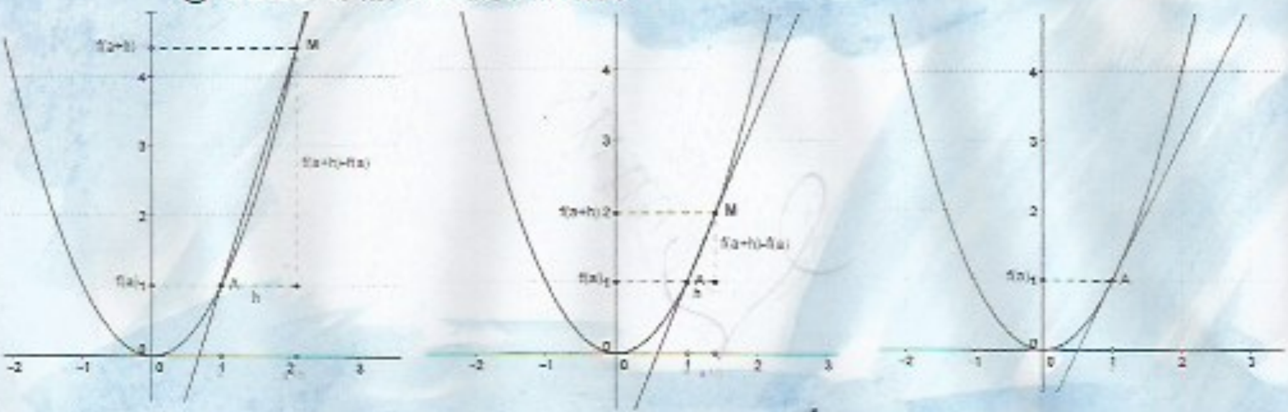
3) Détermine l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3.

$y = \frac{1}{2}x - 0{,}5$

4) Dresse le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		$-2{,}5$		$0{,}75$		$3{,}2$		6		$+\infty$
Variations de $f(x)$		↗	$3{,}5$	↘	$-0{,}5$	↗	1	↘	-2	↗	

⊗ Calcul d'un nombre dérivé



Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit un réel a appartenant à I.
Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$, avec $h \neq 0$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel appartenant à I. On dit que la fonction f est <u>dérivable</u> en a si $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe, et on a : $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer un nombre dérivé par le calcul :*

1) Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Calculer $f'(2)$.

$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2+2(2+h)-3-5}{h} = \dfrac{4+2h+2h+h^2+4+2h-\cancel{3}-\cancel{5}}{h}$

$= \dfrac{6h+h^2}{h} = h+6$ Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h+6 = 6$

Donc $f'(2)=6$

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x-5|$. La fonction g est-elle dérivable en $x = 5$?

$g(5+h)-g(5) = |5+h-5| - |5-5| = |h|$

si $h>0$ $\dfrac{g(5+h)-g(5)}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$

si $h<0$ $\dfrac{g(5+h)-g(5)}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \dfrac{-h}{h} = -1$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(5+h)-g(5)}{h}$ n'existe pas

g n'est pas dérivable en 5.

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer l'équation d'une tangente à une courbe:*

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

La tangente au point A(2;5) a pour coef. directeur $f'(2)=6$ donc son équation est de la forme : $y = 6x+p$

Elle passe par A, donc son équation est ~~y=6x~~ $5 = 12+p$

$p = 5-12$

$p = -7$

donc $\boxed{y = 6x-7}$

Propriété

Si f est dérivable en a, la courbe C_f admet au point A $(a ; f(a))$ une **tangente** T_A qui a pour équation :
$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

Démonstration :

O.S.Q le coef directeur de T_A est $f'(a)$. Donc son équation est de la forme : $y = f(a)x + p$

$A(a; f(a)) \in T_A$ donc $f(a) = f'(a) \times a + p$ donc $p = f(a) - f'(a) \times a$

Donc $T_A = y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

~~Donc bien~~

III. Fonction dérivée.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a. Pour $h \neq 0$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$

donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 2a + h = 2a$ Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $2a$. On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = 2x$.

Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I. Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'.

Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x)\ \frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier			
$f(x) = \sqrt{x}$			

exemples :

$f(x) = x^3$

$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} = \frac{h(3a^2 + 3ah + h^2)}{h}$

$f(a) = \lim\limits_{h \to 0} 3a^2 + 3ah + h^2 = 3a^2$

$f'(x) = 3x^2$

Démonstration pour la fonction inverse :

$f(x)=\frac{1}{x}$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}\times\frac{1}{h}=\frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h}=\frac{-1}{a(a+h)}$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)}=\frac{-1}{a^2}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

IV. Opération sur les fonctions dérivées.

Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)'=u'+v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)'=ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)'=u'\times v+u'\times v'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)^2=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

Démonstration pour la fonction le produit :

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a)\times v(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)\times v(a+h)}{h}-\frac{u(a)\times v(a+h)}{h}$$

$$+\frac{u(a)\times v(a+h)}{h}-\frac{u(a)\times v(a)}{h}=\lim_{h\to 0}v(a+h)\left[\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\right]+u(a)\times\left[\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\right]$$

$$=v(a)\times u'(a)+u(a)\times v'(a)$$

☑Savoir-faire : Savoir dériver une fonction polynôme :

Détermine les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

$f(x)=4x^3+3x^2+2x-5$

$f'(x)=4\times 3x^2+3\times 2x+2$

$f'(x)=12x^2+6x+2$

$(uv)'=u'\times v+v'\times u$

$f(x)=(2x+3)(5x^2-3)$

$f=u\times v$ avec $u(x)=2x+3$ et $v(x)=5x^2-3x$

Donc $f'=u'\times v+v'\times u$ avec $u'(x)=2$ et $v'(x)=10x-3$

Donc $f'(x)=2\times(5x^2-3)+(10x-3)\times(2x+3)$

$f'(x)=30x^2+18x-9$.

☑Savoir-faire : Savoir dériver une fonction rationnelle :

$f(x)=\frac{1}{2x+3}$ $\quad D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-3}{2}\right\}$

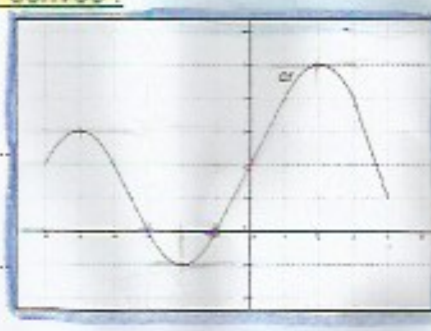
$f=\frac{1}{u}$ avec $u(x)=2x+3$ $\quad f'=\frac{-u'}{u^2}$ $\quad u'(x)=2$

Donc $f'(x)=\frac{-2}{(2x+3)^2}$

V. Fonction dérivée et sens de variation.

☑ *Savoir faire : Savoir déterminer graphiquement le signe d'une dérivée :*

On donne ci contre la courbe représentative C_f d'une fonction f.



1) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

◆ $f(x) = 0$.

$S(E): f(x)=0 \quad S(E_1): \{-1\ ; -3\}$

Abscisses des points d'intersection avec les points des abscisses

◆ $f'(x) = 0$.

abscisse des points où la tangente est horizontale

$x = -5\ \ -2$ et 2

Etablir le tableau de signes de f.

x	-6		-3		-1		4
Signes de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Etablir le tableau se signes de f'

x	-6		-5		-2		2		4
Signes de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Etablir le tableau de variations de f.

x	-6	-5	-2	2	4
variations ~~Signes~~ de $f(x)$	2 ↗	3 ↘	-1 ↗	5 ↘	1

Théoreme (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

☑ *Savoir-faire : Savoir étudier une fonction polynôme du 3° degré :*

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$.

1) Déterminer $f'(x)$.

$f'(x) = 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 12$

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

2) Déterminer le signes de $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f.

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 6 \times -12 = 36 - 24 \times -12$

$\Delta > 0$ donc $S(E)$ 2 solutions $= 36 + 288 = 324$

$x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signes de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		↗	24	↘	-3	↗	

$f(-2) = 24$

$f(1) = -3$

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_1 à C_f au point $A(1\ ; -1)$.

☑ *Savoir-faire : Savoir étudier une fonction rationnelle :*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.