

La fonction exponentielle.

I. Définition.

Théorème

Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Démonstration :

- **Existence** : on admet l'existence d'une telle fonction.
- **Unicité** : cette démonstration est exigible pour le bac : **ROC**

- Démontrons que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$

On rappelle que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $v : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x) = \dots\dots\dots$. En particulier, la fonction $v : x \mapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x) = \dots\dots\dots$

Ainsi, la fonction φ , produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a :

$\varphi(x) = u(x) \times v(x)$ où $u(x) = \dots\dots\dots$ donc $u'(x) = \dots\dots\dots$ et $v(x) = \dots\dots\dots$ donc $v'(x) = \dots\dots\dots$

En appliquant la formule de dérivation d'un produit, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Donc φ est une fonction $\dots\dots\dots$ sur $\mathbb{R}$. Or $\varphi(0) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$, et donc, pour tout nombre réel x , $\varphi(x) = 1$ c'est-à-dire que $f(x) \times f(-x) = 1$. On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

Démontrons maintenant l'unicité (**ROC**), c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Pour cela, supposons qu'il existe une autre fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: $g' = g$ et $g(0) = 1$, on montre alors que $g = f$, c'est-à-dire que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)$, ce qui prouvera l'unicité de la fonction.

Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car g et f le sont et f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{\dots\dots\dots}{[f(x)]^2} = \dots\dots\dots$ car $f' = f$ et $g' = g$

Ainsi, h est une fonction $\dots\dots\dots$ sur $\mathbb{R}$. Or, $h(\dots) = \frac{g(\dots)}{f(\dots)} = \dots\dots\dots$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \dots\dots\dots$

Définition

On appelle fonction exponentielle l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. On note cette fonction **exp**.

Propriété

exp(0) = 1 ; pour tout nombre réel x , **exp**($-x$) = $\frac{1}{\text{exp}(x)}$.

II. Propriétés de la fonction **exp**.

1) Relation fonctionnelle

Propriété

Pour tout nombre réel x et y , **exp**($x + y$) = **exp**(x) $\times$ **exp**(y)

On dit que la fonction exponentielle « transforme » une somme en un produit.

Démonstration :

Soit y un nombre réel quelconque et fixé et soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$

1. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que h' est la fonction nulle.

.....
.....
.....

2. En déduire que pour tout nombre réel x , $h(x) = \exp(y)$ (on pourra calculer $h(0)$)

.....

3. En déduire que pour tous nombres réels x et y , $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

.....

Corollaires

Pour tout nombre réel x et y , et pour tout entier relatif n : $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$; $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

Eléments de démonstration :

.....
.....
.....
.....
.....
.....

2) Le nombre e

Définition

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e . On a ainsi $\exp(\dots) = \dots$

Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e . $e \approx \dots$

On a donc, pour tout entier relatif n : $\exp(n) = \exp(1 \times n) = [\exp(1)]^n = e^n$.

Par extension, on convient de noter pour tout nombre réel x , $\exp(x) = \dots$ (lire « exponentielle de x » ou « e exposant x »)

Propriété

Avec cette notation, les propriétés précédentes s'écrivent : Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n :

$$e^{x+y} = \dots \quad e^{-x} = \dots \quad e^{x-y} = \dots \quad e^{nx} = \dots$$

Remarque :

- Ainsi, le nombre $\exp(3) = e^3$ est bien égal à $e \times e \times e$
- On a, par exemple, $e^0 = \dots$ et $e^1 = \dots$

III. Etude de la fonction $\exp$.

1. Sens de variation de la fonction $\exp$

Propriété

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que la fonction $\exp$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que : pour tout réel x , $e^x > 0$. Pour cela, on suppose que : (hypothèse absurde)

Or, on sait que, pour tout réel x , $e^x \neq 0$. Ainsi, on suppose qu'il existe un réel a tel que $e^a < 0$.

Or, la fonction exponentielle est dérivable donc **continue** sur $\mathbb{R}$ et

Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que : il existe au moins un réel α tel que $e^\alpha = 0$.

Ce qui est contradictoire avec la propriété (démontrée précédemment) : pour tout réel x , $e^x \neq 0$.

On en déduit que notre supposition (absurde) : Il existe un réel a tel que $e^a < 0$ est fausse, et donc que sa « négation » est vraie ; c'est-à-dire que :

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$. Or, pour tout nombre réel x , $\exp(x) > 0$, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

conséquences :

$e^a = e^b \Leftrightarrow \dots\dots\dots$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

En particulier : $e^x \geq 1 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

2. Limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $\exp$

Propriété

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Démonstration : ([exigible BAC ROC](#))

Montrons que, pour tout nombre réel x , $e^x > x$. On pourra alors conclure en appliquant un théorème de comparaison de limites.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x$. Etudier les variations de f et en déduire le signe de $f(x)$.

.....

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

.....

Propriété

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Démonstration : ([exigible BAC ROC](#))

Or, quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$ donc par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$.

.....

Conséquence graphique :

The graph shows the function $y = e^x$ in red. Two tangent lines are drawn: T_0 is tangent at point A (0, 1) and T_1 is tangent at point B (1, e). The y-axis is labeled with 0, 1, 2, and e. The x-axis is labeled with -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, and 2. A table on the left contains three empty rows for data entry.

[illegible]

a. Des limites à connaître :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$$
[illegible]

b. Fonctions $x \rightarrow e^{u(x)}$:

Notation : u désigne une fonction définie sur un intervalle I . On note e^u la fonction $x \rightarrow e^{u(x)}$.

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $e^u : x \rightarrow \exp[u(x)]$ est dérivable sur I et

$$(e^u)' = u'e^u$$

Exemples : calculons les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{x^2 + x + 1}$$

$$f(x) = e^{2x+1}$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \text{ pour } x \text{ réel non-nul.}$$

Propriété

Limites de la fonction e^u

a désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$. l désigne un nombre réel.

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = \dots\dots\dots$

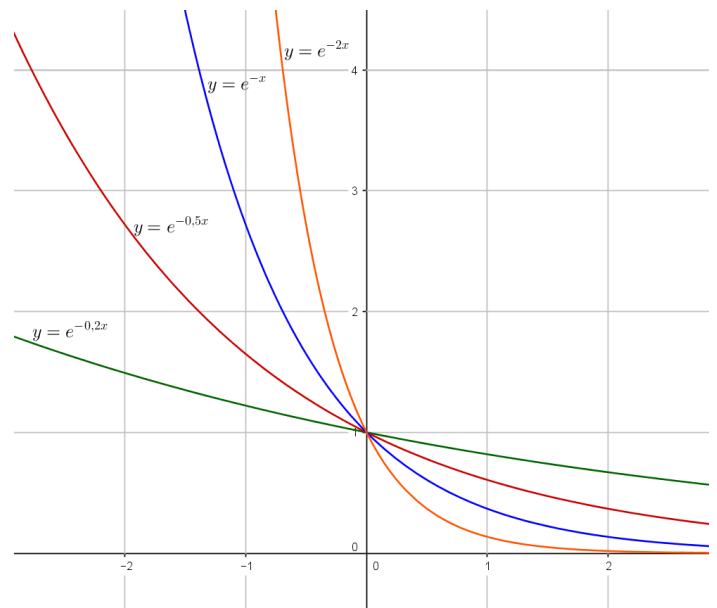
Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = \dots\dots\dots$

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = \dots\dots\dots$

Exemples-types :

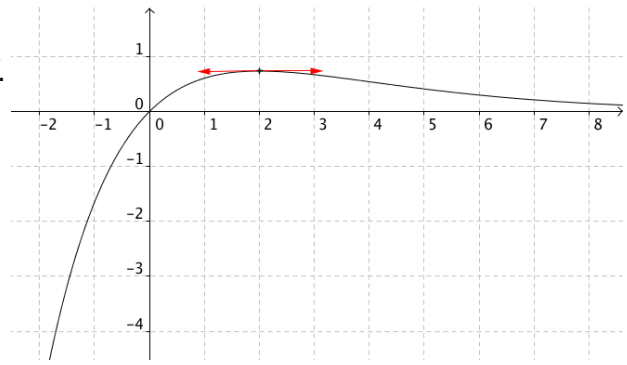
Exemple 1 : Les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = e^{-kx}$ où k est un nombre réel **strictement positif**.

- Calculer les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Dresser le tableau de variations de la fonction f_k
- Etudier la position relative des courbes C_k et $C_{k'}$ où k et k' sont deux réels tels que $k < k'$



Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

- Etudier les limites de f à l'infini.
- Calculer la dérivée de la fonction f .
- Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- Tracer la courbe représentative de la fonction f .

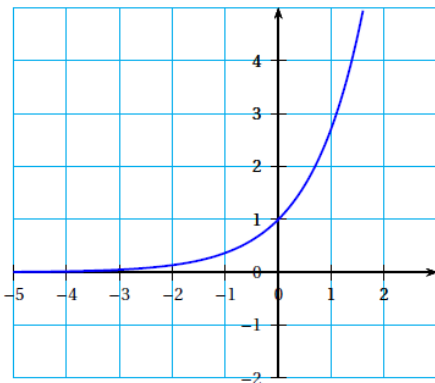


☑ BAC S, Liban mai 2015

EXERCICE 3

3 points

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = e^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

- Dans cette question, on choisit $m = e$.
Démontrer que la droite $\mathcal{D}_e$, d'équation $y = ex$, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.
- Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m , le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_m$.
- Démontrer cette conjecture.*

☑ BAC S, Antilles Guyane Juin 2014

EXERCICE 2

Commun à tous les candidats

6 points

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

- Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).

En déduire le signe de $g(x)$.

- Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
- On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = e^{-x} g(x).$$

- En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
- Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
 - Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T .