Equations à une inconnue.

I. Introduction.

Exemple : Je pense à un nombre, si j'ajoute 4 à ce nombre je trouve 13. Quel est le nombre auquel je pense ?

Une équation est une question dans laquelle il faut trouver un nombre inconnu.

Souvent la question est écrite en langage mathématique Résoudre (E) : $x + 4 = 13$.

Une réponse à la question s'appelle une solution de l'équation.

Définition

Résoudre une équation, c'est chercher toutes les valeurs d'un nombre inconnu qui vérifient l'égalité proposée. Ces valeurs sont appelées solution de l'équation.

Remarque : une équation peut avoir plusieurs solutions.

En langage mathématique, une équation est composée de deux membres séparés par " = "

Attention : ne pas confondre le statut de la lettre x

☺ Dans une expression littérale, elle ne représente pas un nombre précis mais on peut lui donner n'importe qu'elle valeur on l'appelle la variable

☺ Dans une équation, elle ne représente un ou plusieurs nombres précis qu'il faut retrouver on l'appelle l'inconnu

$A(x) = 2x + 4$ x est une variable (E) : $2x + 4 = 13$. x est l'inconnue

II. Vérifier si un nombre est solution ou non d'une équation.

a) Tester une égalité.

Méthode

Il faut remplacer l'inconnue par les nombres proposés dans chacun des membres séparement puis constater si l'égalité est vérifié ou non.

Savoir-faire

3 rend-il vrai l'égalité $2x^2 - 5 = x + 10$?

* $2 \times 3^2 - 5 = 18 - 5 = 13$ | donc 3 est solution de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$
* $3 + 10 = 13$

b) Vérifier si un nombre est solution ou non d'une équation.

Savoir-faire

Les nombres 4 et -5 sont-ils solutions de l'équation (E) : $2x - 3 = 3x + 2$.

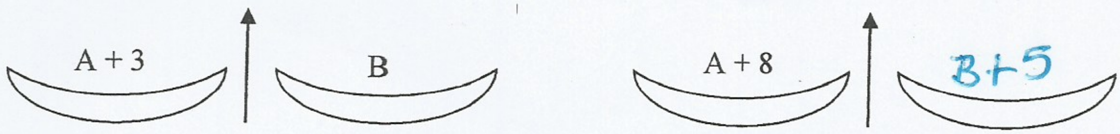
Ce n'est pas la peine de résoudre l'équation.

* $2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5$ de plus $3 \times 4 + 2 = 12 + 2 = 14$ donc 4 n'est pas solution de (E)
* $2 \times (-5) - 3 = -10 - 3 = -13$ de plus $3 \times (-5) + 2 = -15 + 2 = -13$ donc -5 est une solution de (E)

III. Egalités et opérations.

a) Egalités et addition.

Exemple : La première balance est en équilibre, complète la deuxième pour qu'elle le soit.



Règle

Une égalité reste vraie si on ajoute ou on soustrait un même nombre aux deux membres

Traduction en language mathématique

Si $a=b$ alors $a+c=b+c$ et $a-c=b-c$ $\forall$ a,b et c

Applications :

☺ Si a est un nombre tel que a = 10 alors on peut affirmer que a + 8 = $10+8=18$

☺ Si b est un nombre tel que b + 5 = 21 alors on peut affirmer que b = $21-5=16$

☺ Si x est un nombre tel que x - 10 = 9 alors on peut affirmer que x = $10+9=19$

b) Egalités et multiplication.

Règle

Une égalité reste vraie si on multiplie ou on divise par un même nombre les deux membres

Traduction en language mathématique

Si $a=c$ alors $a\times c=b\times c$ $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$ $\forall$ a,b et $c\neq 0$

Applications :

☺ Si a est un nombre tel que a = 10 alors on peut affirmer que 2a = $2\times 10=20$

☺ Si b est un nombre tel que 5b = 30 alors on peut affirmer que b = $\frac{30}{5}$ donc b = 6

☺ Si x est un nombre tel que x = 9 alors on peut affirmer que -4 x = $-4\times 9=-36$

☺ Si x est un nombre tel que -6x = 42 alors on peut affirmer que x = $\frac{42}{-6}$ donc x = -7

IV. Résolution d'équation.

a) Degré d'une équation.

Définition

On appelle degré d'une équation la plus grande puissance de l'inconnue dans la forme développée

Exemples

$(E_1): x^2+3=0$ ($2^{ème}$ degré), $(E_2): x^{15}+3x^{10}-5x^4=0$ (15^e degré)

$(E_3): 3x+2=5$ (1^{er} degré), $(E_4): (2x+1)(x+3)=0$ (2^e degré)

b) Equations du premier degré.

Toute équation du premier degré peut s'écrire sous la forme $(E): ax = b$, elle a une solution qui est $\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$

Savoir-faire

Résoudre l'équation $(E) : 2x + 3 = 13$.

$(E) : 2x + 3 = 13.$

Donc $(E) : 2x = 10$ — On soustrait 3 aux 2 membres

Donc $(E) : x = \frac{10}{2}$ — On divise les 2 membres par 2

Donc $(E) : x = 5$

Vérification : $2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$ (OK)

Conclusion : Donc l'équation a une solution qui est 5

Savoir-faire

Résoudre l'équation $(E) : 2x - 10 = 5x + 2$.

$(E) : 2x - 10 = 5x + 2.$

Donc $(E) : 2x - 10 - 5x = 2$ — On soustrait $5x$ aux 2 membres

Donc $(E) : -3x - 10 = 2$ — On ajoute 10 aux 2 membres

Donc $(E) : -3x = 2 + 10$

Donc $(E) : -3x = 12$ — On divise les 2 membres par -3

Donc $(E) : x = \frac{12}{-3}$

Donc $(E) : x = -4$

Vérification : $2 \times (-4) - 10 = -8 - 10 = -18$; $5 \times (-4) + 2 = -20 + 2 = -18$

Conclusion : Donc l'équation a une solution qui est -4 $S(E) = \{-4\}$

c) Equations du deuxième degré.

☺ Equation du type $(E) : x^2 = a$

Résoudre l'équation $(E) : x^2 = 81$
deux solutions
$x = 9$ ou $x = -9$
$S(E) = \{-9 ; 9\}$

Résoudre l'équation $(E) : x^2 = 13$
deux solutions
$x = \sqrt{13}$ ou $x = -\sqrt{13}$
$S(E) = \{-\sqrt{13} ; \sqrt{13}\}$

Résoudre l'équation $(E) : x^2 = 0$
une solution
$x = 0$
$S(E) = \{0\}$

Résoudre l'équation $(E) : x^2 = -5$
Impossible
un carré de nombre réel est toujours positif (règles des signes)
$S(E) = \emptyset$

☺ Cas général.

La résolution des équations du 2^{nde} degré dans le cas général est au programme de la classe de 1^{re}. Cette année nous verrons un cas particulier appelé produit nul. Si le produit de 2 nombres est égale à 0 alors je me dis qu'un nombre doit forcement être égal à 0.

Phrase magique

Un produit est nul si et seulement si 1, au moins, des facteurs est nul.

Traduction en language mathématique

$A \times B = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$

Cette phrase est magique car elle transforme une équation du $2^{ème}$ degré en 2 équation du 1^{er} degré.

Savoir-faire

Résoudre l'équation $(E) : (2x+3)(4x-8) = 0$

PM : Un produit est nul si et seulement si un, au moins des facteurs est nul.

Donc $2x+3=0$ ou $4x-8=0$

$2x=-3$ ou $4x=8$

$x=\frac{-3}{2}$ ou $x=\frac{8}{4}=2$

Donc (E) à deux solutions $\frac{-3}{2}$ et 2. $S(E)=\{\frac{-3}{2} ; 2\}$

V. Résolution de problèmes.

Définition

Mettre en équation un problème, c'est traduire son énoncé par une égalité mathématique avec une inconnue.
Résoudre l'équation trouvée permet de répondre au problème posé.

Savoir-faire

Trouve le nombre tel que son quintuple augmenté de 7 soit égal à 3.

Soit x le nombre cherché. $(E) : 5x+7=3$

$(E) : 5x=-4$

$(E) : x=\frac{-4}{5}$

$S(E)=\{\frac{-4}{5}\}$

Donc le nombre cherché est $\frac{-4}{5}$

Savoir-faire

Mickaël a 18 ans et son père a 46 ans. Dans combien d'années le père de Mickaël aura-t-il le double de son âge ?

Soit x le nombre d'années. On traduit le problème par l'équation

$(E) : 46+x=2(18+x)$

$(E) : 46+x=36+2x$

$(E) : -x=-10$

$(E) : x=10$

Dans 10 ans l'âge du père sera 56 double de celui du fils 28