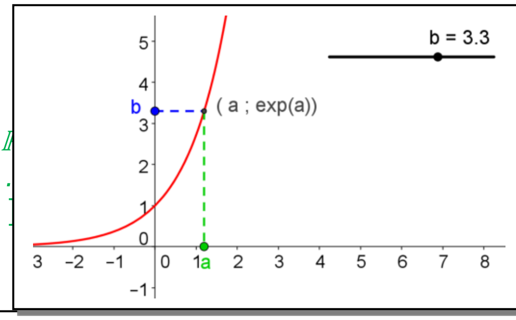
Fonction logarithme népérien.

Activités 1 et 2 p 136 et 137

I. Définition et premières propriétés.

1) Définition.



La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur ℝ valeurs dans] 0 ; +∞[. De plus, $\lim_{x \to -\infty} e^x = . . .$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = . .$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel b de +∞[l'équation $e^x = b$ admet une unique solution a dans ℝ.

Définition

On appelle <u>logarithme népérien</u> d'un réel strictement positif b, l'unique solution de l'équation (E) : $e^x = b$. On note ce nombre $ln(b)$.
La <u>fonction logarithme népérien</u>, notée ln, est la fonction définie sur] 0 ; +∞ [par $ln : x \mapsto ln(x)$.

<u>*Exemple :*</u>
L'équation (E) : $e^x = 3$ admet une unique solution. Il s'agit de x =….. .
A l'aide de la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée : $x \approx$……….. .

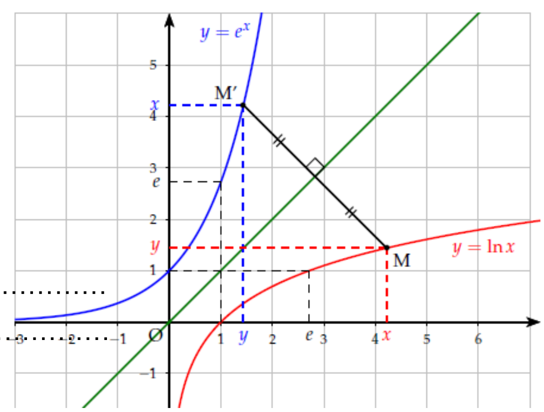
Conséquences : *Elles découlent directement de la définition :*

Propriété

- $a = ln(b)$ avec $b > 0 \Leftrightarrow e^a = b$.
- Pour tout x, $ln(e^x) = x$.
- Pour tout x positif, $e^{ln(x)} = x$.
- $ln(1)$ = . . (car . . . .)
- $ln(e)$ = . . .(car . . .. . .)
- $ln\left(\frac{1}{e}\right)$ = . . .(car . . .)

Propriété

Dans un repère, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………

2) Equations et inéquations avec la fonction ln.

Propriété

la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur]0 ; + ∞[

<u>*Démonstration :*</u>

……

……

Conséquences :

Propriété

Pour tous nombres réels a > 0 et b > 0 :

- $ln(b) = ln(a) \Leftrightarrow b = a$. ♦ $ln(b) < ln(a) \Leftrightarrow b < a$.
- $ln(a) < 0 \Leftrightarrow$ .... ♦ $ln(a) > 0 \Leftrightarrow$ ....

☑Savoir-faire : Savoir résoudre des équations avec du $\ln$:

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

$(E_1) : ln(x) = 2$ $(E_2) : e^{x+1} = 5$ $(E_3) : 3ln(x) - 4 = 8$ $(I_1) : \ln(6x-1) \geq 2$ $(I_2) : e^x + 5 > 4e^x$

....

....

....

....

II. Propriété algébriques.

1) Relation fonctionnelle.

Théorème

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Démonstration :

....

....

Remarque : *Cette formule permet de transformer un produit en somme.*

2) Logarithme d'un inverse, d'un quotient, d'une puissance ..... :

Propriété

Pour réel x et y strictement positif, on a :

- $ln(\frac{1}{x}) = - ln(x)$ ♦ $ln(\frac{x}{y}) = ln(x) - ln(y)$ ♦ $ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} ln(x)$ ♦ $ln(x^n) = n\, ln(x)$

Démonstrations :

....

....

....

....

☑Savoir-faire : Savoir simplifier une écriture avec du $\ln$:

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$ $B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$ $C = \ln e^2 - \ln\frac{2}{e}$

....

....

....

....

III. Etude de la fonction logarithme népérien.

1) Continuité et dérivabilité

Propriété

La fonction logarithme népérien est dérivable sur] 0 ; +∞ [et $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$

Démonstration :

On admet que la fonction ln est dérivable sur]0 ; + ∞[, Soit f la fonction définie sur]0 ; + ∞[par $f(x) = e^{\ln x} = x$.

………

………

………

Remarque : ……………………………………………………………………………………………

Propriété

La fonction logarithme népérien est continue sur] 0 ; +∞ [.

Démonstration :

………

Exemple : *Dériver la fonction suivante sur l'intervalle* $]0;+\infty[$: $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

………

………

………

2) Limites aux bornes

Propriété

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

Démonstration :

………

………

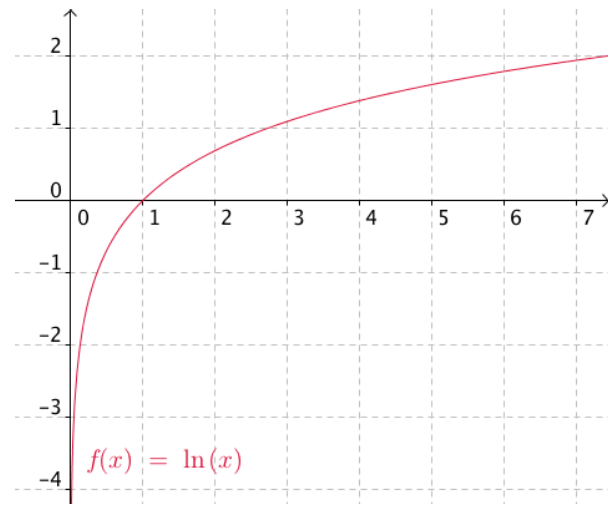
………

………

3) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction ln

x	
Signes de $ln'(x)$	
Variations de ln	



IV. Compléments sur la fonction ln.

1) Limites à connaitre

Propriété

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration :

....

....

....

Propriété (croissances comparées)

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$.

Démonstration :

....

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer une limite avec du $\ln$:*

a) $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x)$ b) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x-1}$

....

....

....

....

2) Fonctions de la forme $ln\ (u)$

Notation : u désigne une fonction strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $x \mapsto ln[u(x)]$ définie sur I est notée $ln(u)$.

Propriété (admise)

u désigne une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $ln(u)$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{(ln(u))'}$ **=** ....

Conséquence : Les fonctions u *et* $ln(u)$ *ont le même sens de variations* sur I.
En effet, $(\ln u)'$ et u' sont de même signe car $u > 0$.

☑*Savoir-faire : Savoir dériver une fonction composée avec du $\ln$:*
Justifier que les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer les fonctions dérivées.

$f(x) = \ln(x^2 + 2)$ $g(x) = \ln(e^{2x} + e^x + 1)$

....

....

....