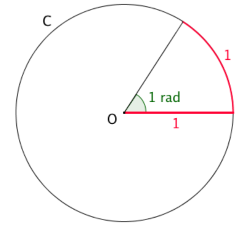
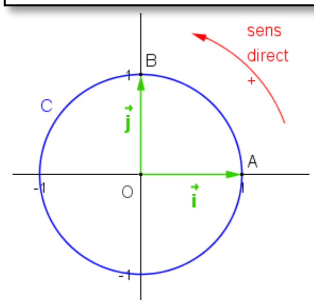
Fonctions trigonométriques.

I. Radian et cercle trigonométrique.



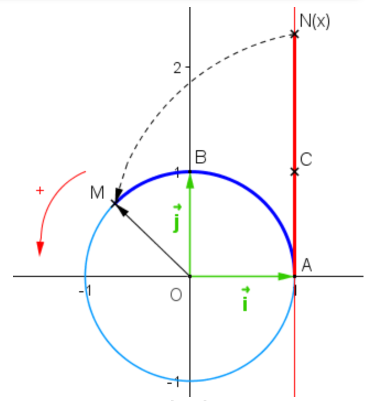
Définition

Soit un cercle *C* de centre O et de rayon 1. On appelle 1 <u>radian</u>, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



Définition

Sur un cercle, on appelle <u>sens direct</u>, ou <u>sens trigonométrique</u> le sens contraire des aiguilles d'une montre.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et orienté dans le sens direct, le <u>cercle trigonométrique</u> est le cercle de centre O et de rayon 1.

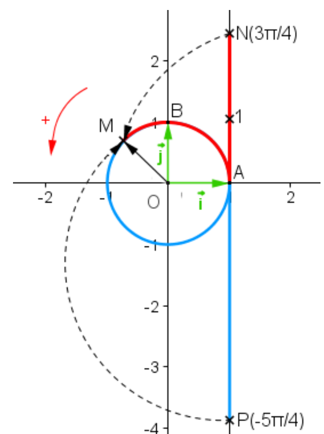


Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A;\vec{\jmath})$ soit un repère de la droite.
Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.

180 degré correspond à ..... radians(....)

☺ A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle.



Exemples :

....

....

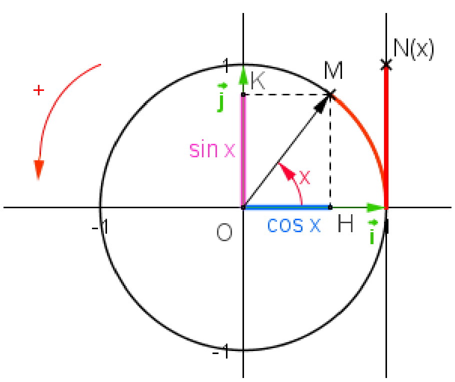
....

....

....

....

II. Cosinus et Sinus d'un angle.



Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O. Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x.
À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.

Définition

- Le <u>cosinus du nombre réel</u> x est l'abscisse de M et on note $\cos(x)$.
- Le <u>sinus du nombre réel</u> x est l'ordonnée de M et on note $\sin(x)$.

....

....

....

Propriété

Pour tout nombre réel x, on a :

☺ ☺ ☺

☺ ☺

Valeurs remarquables						
x	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos (x)						
sin (x)						

Propriété

Pour tout nombre réel x, on a :

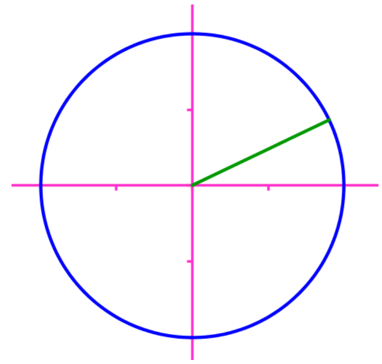
☺ $\cos(-x) =$ ☺ $\sin(-x) =$

☺ $\cos(\pi + x) =$ ☺ $\sin(\pi + x) =$

☺ $\cos(\pi - x) =$ ☺ $\sin(\pi - x) =$

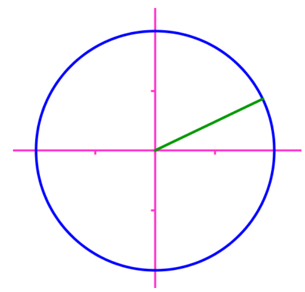
☺ $cos(\frac{\pi}{2} + x) =$ ☺ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$

☺ $cos(\frac{\pi}{2} + x) =$ ☺ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$



III. Equations trigonométriques.

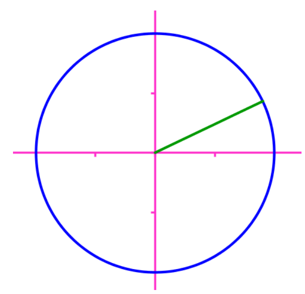
1) Equation $\cos(x) = \cos(a)$.



Propriété

Soit a un nombre réel. L'équation $\cos(x) = \cos(a)$ a pour solutions les nombres réels ....et ....où k est un nombre relatif.

2) Equation $\sin(x) = \sin(a)$.



Propriété

Soit a un nombre réel. L'équation $\sin(x) = \sin(a)$ a pour solutions les nombres réels ....et ....où k est un nombre relatif.

☑*Savoir-faire : Savoir résoudre une équation trigonométrique:*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : ☺ $\cos(x) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ☺ $\sin(x) = -0,5$.

....

....

....

....

IV. Les fonctions cosinus et sinus.

1) Périodicité

Propriété

Pour tout nombre réel x, on a :

☺ ☺

Remarque : On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

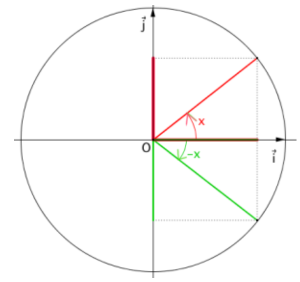
Conséquence : Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π et de la compléter par translation.

2) Parité

Propriété

Pour tout nombre réel x, on a :

☺ ☺



Remarque : On dit que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.

Conséquences : Dans un repère orthogonal,

- la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à ....
- la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à ....

3) Dérivabilité

Propriété

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur IR et on a :

☺ $cos'(x) =$ ☺ $sin'(x) =$

Démonstration :

On admet que les fonctions cosinus et sinus sont dérivables en 0 et on a : $cos'(0) = 0$ et $sin'(0) = 1$.

$cos\ (a + b) =$ $sin\ (a + b) =$

- Soit x un nombre réel et h un nombre réel non nul.

....

....

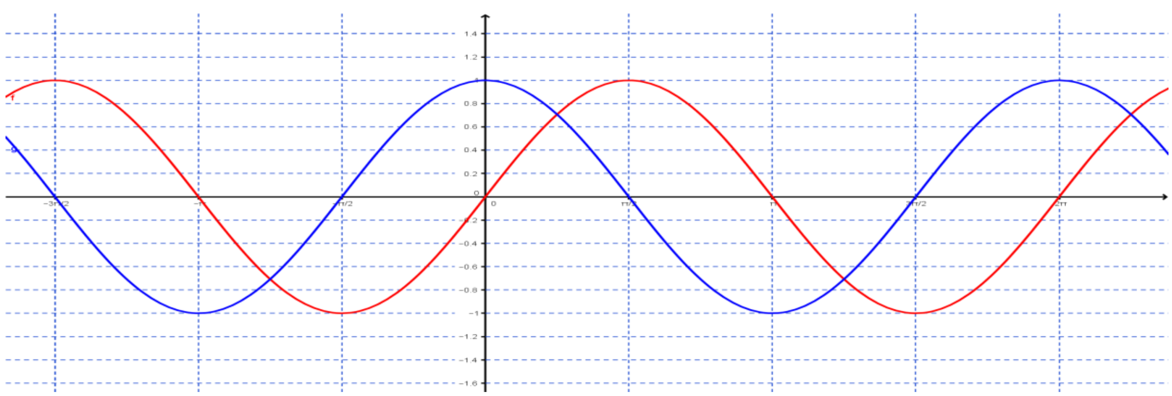
....

4) Variations

x	0 π

x	0 π

5) Représentations graphiques



☑*Savoir-faire : Savoir étudier une fonction trigonométrique:*

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$.

1) Etudier la parité de f.
2) Démontrer que la fonction f est périodique de période π.
3) Etudier les variations de f.

....

....

....

....

....

....

....