Primitives d'une fonction continue.

I. Définition et propriétés.

Introduction :

On considère les fonctions suivantes définies sur IR : $f : x \to 2x + 3.$ et $F : x \to x^2 + 3x - 1.$ *On remarque que l'expression de la dérivée de …… est égale à l'expression de ……C'est-à-dire que ……………………………*

On dit dans ce cas que F est une ……………………………. de f sur IR.

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que ……………………………………………………………………………………………………

☑*Savoir-faire : Savoir Montrer qu'une fonction donnée est une primitive :*

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1-(x+1)e^{-x}$.

Prouve que la fonction F définie sur IR par $F(x) = x + (x+2)e^{-x}$ est une primitive de f sur IR.

………

………

………

………

Propriété

f est une fonction continue sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel k, la fonction ……………………………… est ……………………………….

Démonstration :

………

………

………

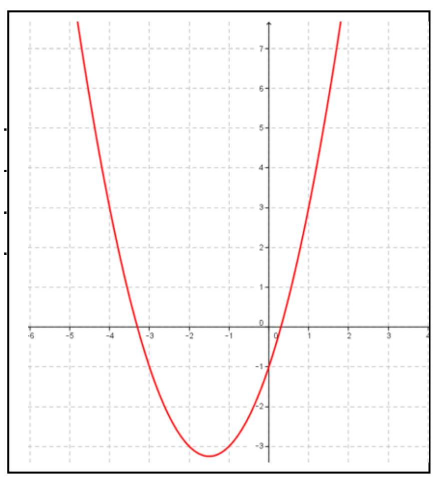
Réciproquement……………………………………………………………………………………………………

………

………

Exemple :

Soit $f : x \to 2x + 3.$ On a vu $F : x \to x^2 + 3x - 1.$ Est une primitive de f.



……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$. On donne deux réels x_0 et y_0 avec $x_0 \in [a ; b]$. Alors il existe une unique primitive G de f sur $[a ; b]$ telle que $G(x_0) = y_0$.

………

………

………

II. Existence de primitives.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Principe de démonstration :

On se place dans le cas où I est un intervalle fermé [a ; b] et on admet le résultat suivant :
Toute fonction continue sur un intervalle fermé admet un maximum et un minimum sur cet intervalle.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Remarque : *Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.*

III. Primitives des fonctions usuelles.

fonction f d'expression	*Une primitive*	*Intervalle*
$f(x) = k \ (k \in \mathbb{R})$		
$f(x) = x^n$ (*n entier positif*)		
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (*n entier* ≥ 2)		
$f(x) = \frac{1}{x}$		
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$		
$f(x) = e^{x}$		
$f(x) = \cos(x)$		
$f(x) = \sin(x)$		

IV. Primitives et opérations sur les fonctions.

Propriété

f et g sont deux fonctions continues sur $[a ; b]$.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a ; b]$ alors :
- .... est une primitive de $f + g$,
- .... est une primitive de kf avec k réel.

Démonstration :

....

....

....

4) Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction	*Une primitive*	*Conditions*
$u'u^n \quad n \neq -1$ entier		
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$		
$\frac{u'}{u}$		
$u'e^u$		
$u(ax+b) \quad a\neq 0$		

☑*Savoir-faire : Savoir rechercher des primitives :*

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = xe^{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3}$ sur $I = \left]0;+\infty\right[$

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I = \mathbb{R}$

e) $f(x) = \cos(2x) - 3\sin(3x-1)$ sur $I = \mathbb{R}$

f) $f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$ sur $I = \mathbb{R}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....