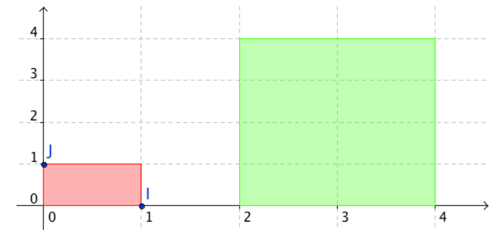
Intégration.

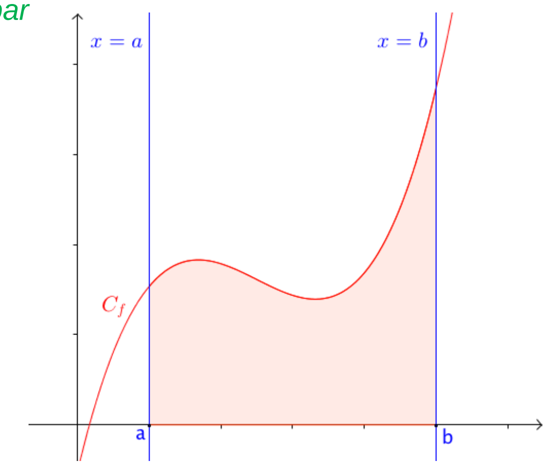
I. Intégrale et aire.

1) Unité d'aire



Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension …sur …. Il s'agit du rectangle …… qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit ……. L'aire du rectangle vert est égale … fois à l'aire du rectangle rouge. L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a. Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

2) Définition



Définition

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

3) Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$ se note : $\int_a^b f(x)\,dx$

Et on lit "intégrale de a à b de $f(x)dx$".

Remarques :

- a et b sont appelés les …………………………..
- x est la ……………….. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs. Ainsi on peut écrire : ……………………………………………..……….. "dx" ou "dt" nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

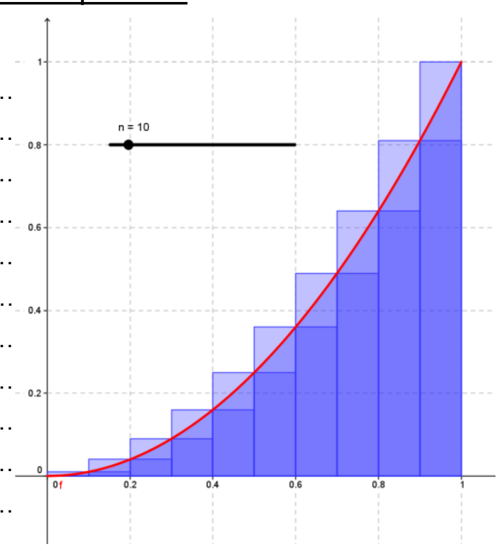
Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1] et se note :………………………….

Nous avons vu en activité que ……………………………………………………….

4) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.



……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

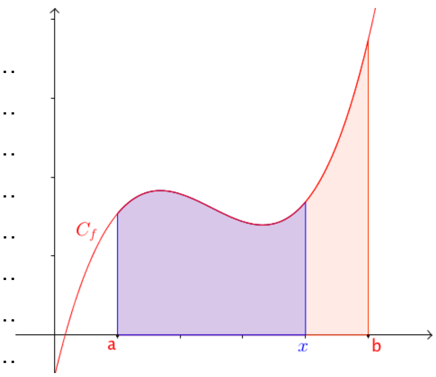
……………………………………………………………………………………………

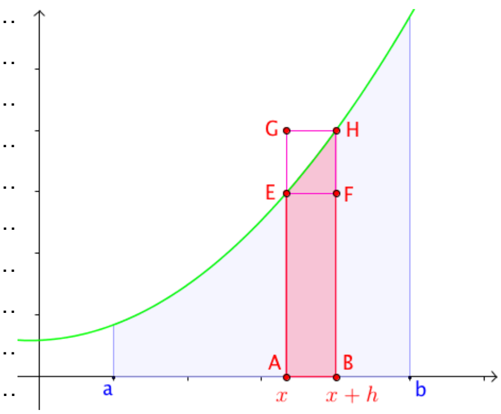
……………………………………………………………………………………………

5) Fonction définie par une intégrale

Théorème

Démonstration dans le cas où f est strictement croissante :

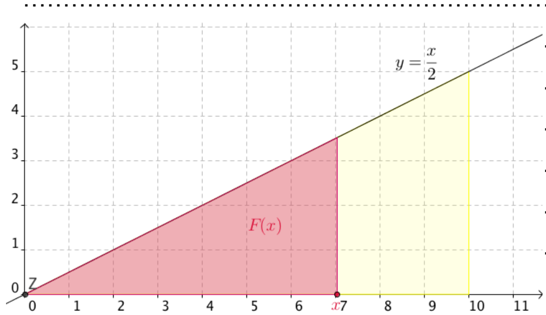


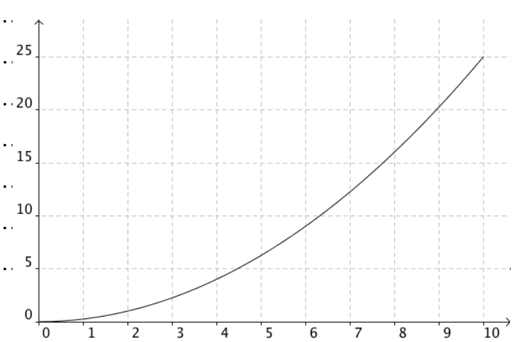


☑Savoir-faire : Savoir étudier une fonction définie par une intégrale:

Soit F la fonction définie sur [0 ; 10] par $F(x)=\int_0^x \frac{t}{2}\,dt$.

a) Etudier les variations de F.
b) Tracer sa courbe représentative.





II. Intégrale d'une fonction continue.

1) Extension de la notion d'intégrale.

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.Si F est une primitive de f alors ………………………………………………….

Démonstration:

……

……

……

……

……

……

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$.

……

Remarque :

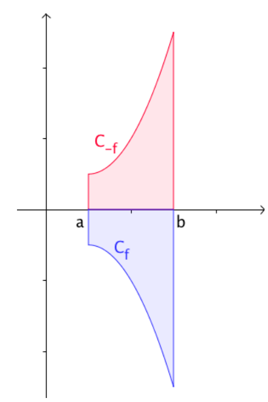
La définition est étendue à des fonctions de signe quelconque.
Ainsi pour une fonction f négative sur $[a\ ;\ b]$, on peut écrire :

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………



Dans ce cas, l'intégrale de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$ est égale à l'opposé de l'aire comprise entre l'axe des abscisse et la courbe représentative de f sur $[a\ ;\ b]$.

Notations : On écrit : $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

☑*Savoir-faire : Savoir calculer une intégrale à partir d'une primitive.*

Calculer : $A = \int_2^5 \left(3x^2 + 4x - 5\right) dx$ $\quad B = \int_{-1}^{1} e^{-2x}\,dx$ $\quad C = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 3}\,dx$

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

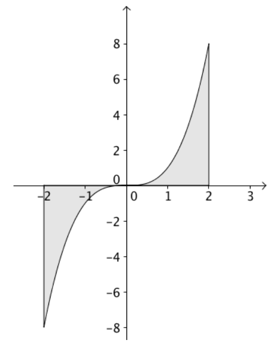
a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ $\qquad$ b) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Démonstration:

……

……

……



Remarque :
Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.
Par exemple :

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}\times 2^4 - \frac{1}{4}\times(-2)^4 = 4-4=0 .$$

2) Relation de Chasles

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a, b et c trois réels de I $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Démonstration:

……

……

1) Linéarité

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Démonstration:

……

……

☑*Savoir-faire : Savoir calculer une intégrale en appliquant la linéarité.*

On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$

a) Calculer $A+B$ et $A-B$.
b) En déduire A et B.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

3) Inégalités

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \leq b$.

a) Si, pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

b) Si, pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration:

....

....

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir encadrer une intégrale.*

a) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e-1$.

....

....

....

....

....

....

III. Valeur moyenne d'une fonction.

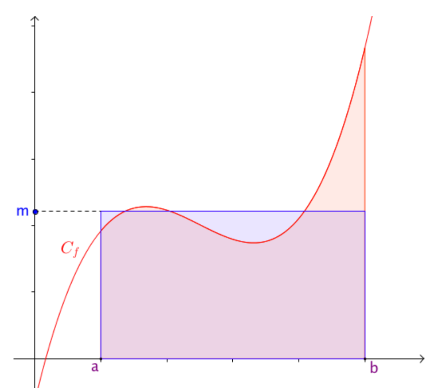
Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] avec $a \neq b$.

On appelle valeur moyenne de f sur [a ; b] le nombre réel $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Interprétation géométrique :

L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu).



Exemple :

Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle [0 ; 10].

....

....

....

....

....

....