Droites et plans de l’espace.

I. Règles de base.

Propriété

Par deux points A et B passe une unique droite (AB). Il y a une infinité de plans qui contiennent (AB).
Par trois points non alignés A, B,C passe un unique plan noté (ABC).

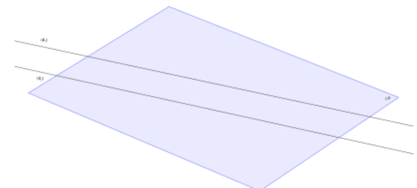
II. Positions relatives de droites et de plans.

1) Positions relatives de deux droites

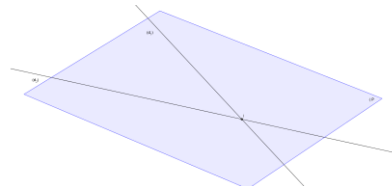
Propriété

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.

Dire que 2 droites sont parallèles signifie qu’elles sont soit coplanaires sans point commun, soit confondues.

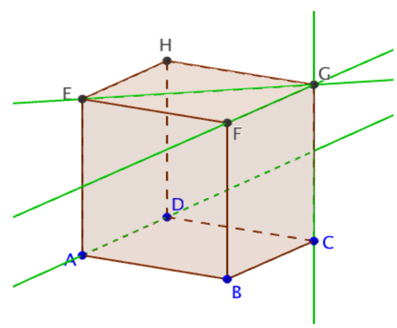


Dire que 2 droites sont sécantes signifie qu’elles sont coplanaires et ont un unique point commun.



Exemple :

ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G.
- Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles.
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires.

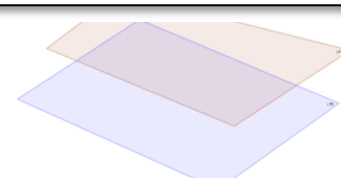


2) Positions relatives de deux plans

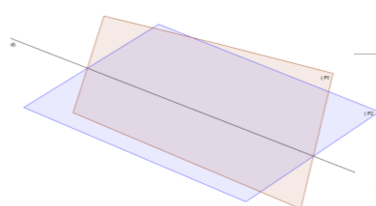
Propriété

Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

Dire que 2 plans sont parallèles signifie soit qu’ils n’ont aucun point commun, soit qu’ils sont confondus.

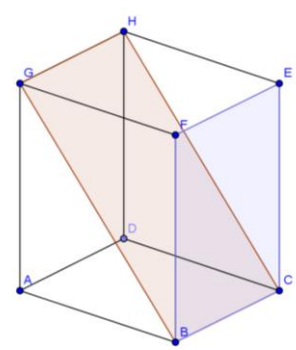


Deux plans non parallèles sont sécants et leur intersection est une droite.



Exemple :

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
- Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants suivant la droite (BC).
- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles



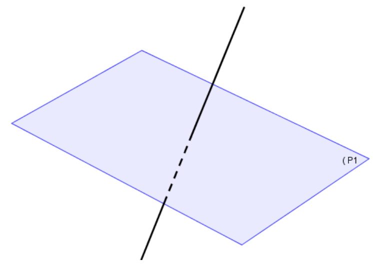
3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

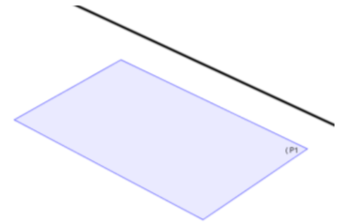
Propriété

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

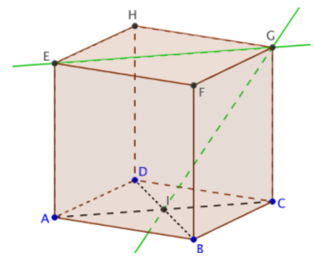
Dire qu'une droite d et un plan P sont parallèles signifie soit que d est contenue dans P, soit d et P n'ont aucun point commun.

Dire qu'une droite d et un plan P sont sécants signifie que leur intersection est réduite á un point.





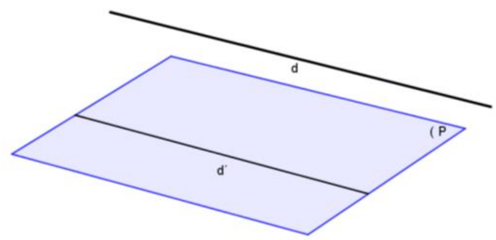
Exemple :
ABCDEFGH est un cube.
- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.

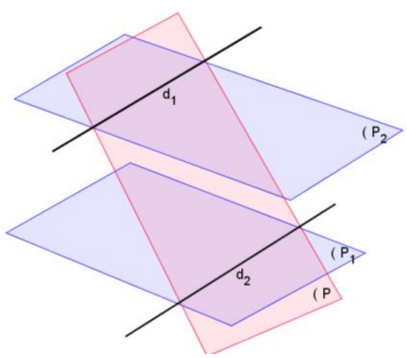


III. Parallélisme dans l'espace.

Théorème 1

Si une droite d est parallèle á une droite d' appartenant á un plan P alors d et P sont parallèles.



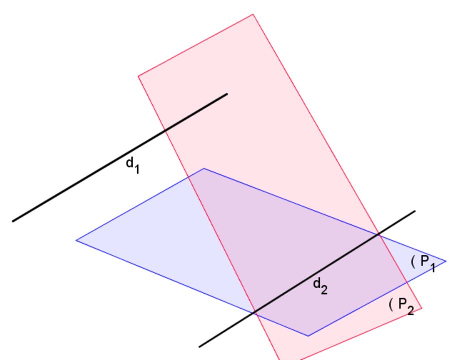


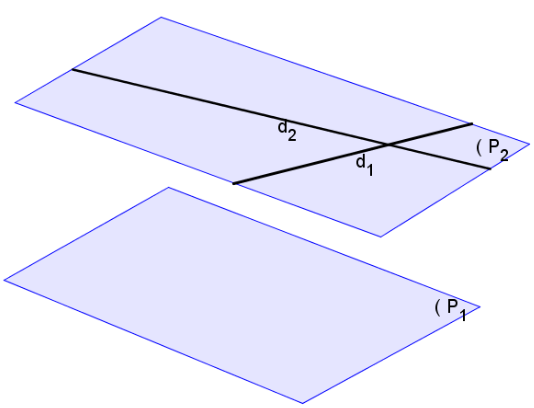
Théorème 2

Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et **leurs intersections sont deux droites parallèles**.

Théorème 3

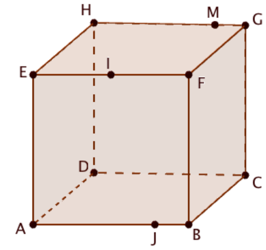
Si une droite est parallèle á deux plans sécants alors elle est parallèle á leur intersection.





Théorème 4

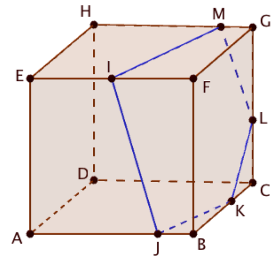
Si un plan *P* contient deux droites sécantes *d* et *d'* parallèles à un plan *P'* alors **les plans *P* et *P'* sont parallèles**.

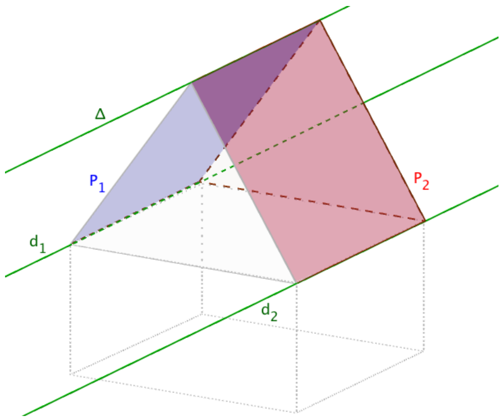


☑*Savoir-faire : Savoir tracer l'intersection de deux plans:*

Construire l'intersection du plan (IMJ) avec le cube ABCDEFGH.

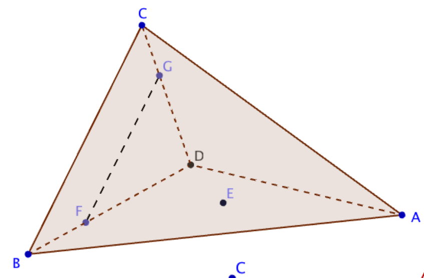
On construit la parallèle à (IJ) passant par M.
En effet, les faces ABFE et DCGH sont parallèles donc le plan (IMJ) sécant à la face ABFE coupe la face DCGH en une droite parallèle à (IJ).
De même, on trace la parallèle à (IM) passant par J.
On obtient les points K et L et ainsi l'intersection cherchée.





Théorème du toit

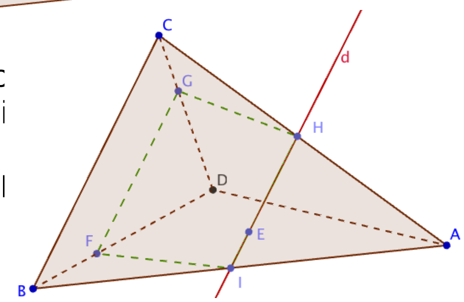
P_1 et P_2 sont deux plans sécants. Si une droite d_1 de P_1 est parallèle à une droite d_2 de P_2 alors la droite d'intersection Δ de P_1 et P_2 est parallèle à d_1 et d_2.



☑*Savoir-faire : Appliquer le théorème du toit :*

ABCD est une pyramide. Le segment [FG] est parallèle à l'arête [BC]. E est un point du plan (ABC).
Construire l'intersection du plan (EFG) avec la pyramide.

(BC) est une droite du plan (ABC) et (FG) est une droite du plan (EFG).Les droites (FG) et (BC) étant parallèles, on peut appliquer le théo pour en déduire que les plans (ABC) et (EFG) se coupent suivant une droi par E et parallèle à (FG) et (BC). Cette droite coupe [AC] en H et [AB] en I Il suffit enfin de tracer le quadrilatère FGHI : intersection du plan (El pyramide.

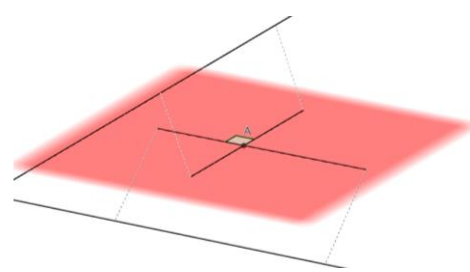


IV. Orthogonalité dans l'espace.

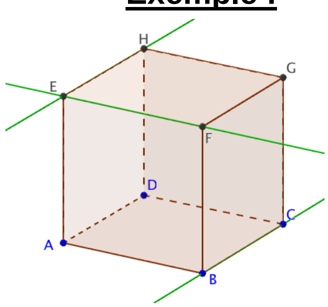
1) droites orthogonales

Définition

Dire que deux droites sont orthogonales signifie que leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.



Exemple :



ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires.
- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales.

Remarque :
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

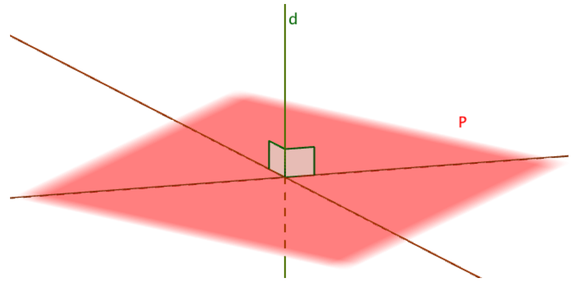
2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété

Une droite *d* est orthogonale à un plan *P* si elle est orthogonale à deux droites sécantes de *P*.

Propriété

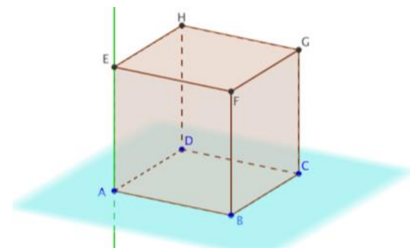
Si une droite *d* est orthogonale à un plan *P* alors elle est orthogonale à toutes les droites de *P*.



Démonstrations (exigible BAC) : Ces deux propriétés seront démontrées avec les outils vectoriels dans le chapitre "*Produit scalaire dans l'espace*".

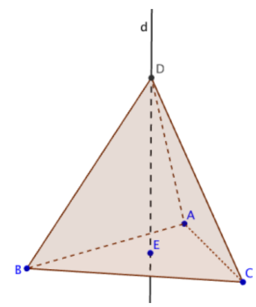
Exemple :

ABCDEFGH est un cube.
(AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).
(AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABC).
Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).



☑*Savoir-faire : Démontrer que des droites sont orthogonales:*

ABC est un triangle équilatéral. E est le point d'intersection de ses médianes.
La droite *d* passant par E est orthogonale au plan (ABC).
La pyramide ABCD est telle que D soit un point de la droite *d*.
Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.



La droite *d* est orthogonale au plan (ABC).
Comme la droite (AC) appartient au plan (ABC), la droite (AC) est orthogonale à la droite *d*.
Par ailleurs, la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BE) car dans un triangle équilatéral, les médianes et les hauteurs sont confondues.
Ainsi, (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BED) : (BE) et *d*. Donc (AC) est orthogonale au plan (BED).
La droite (BD) appartient au plan (BED) donc la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BD).