Géométrie vectorielle dans l'espace.

I. Notion de vecteur dans l'espace.

Définition

Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Remarque :

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : Relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, … restent valides.

II. Vecteurs coplanaires.

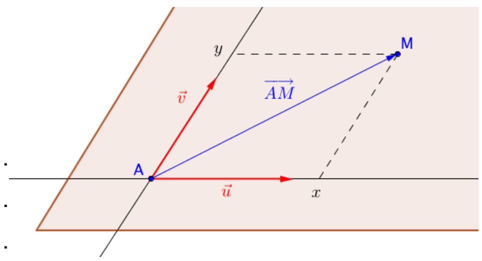
1) Plan de l'espace

Propriété

Soit un point A, B et C trois points non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M définis par $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$, x et y étant des nombres quelconques.

Remarque : avec $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

Dans ces conditions, le triplet $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$ est un repère du plan.



Démonstration :

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Remarque : Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Propriété

Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Démonstration :

Soit deux plan *P* et *P*' de repères respectifs $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$ et $\left(B;\vec{u},\vec{v}\right)$.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

2) Vecteurs coplanaires

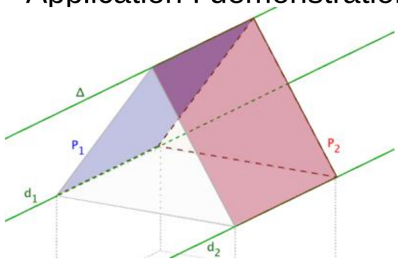
Définition

Trois vecteurs sont coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs coplanaires, alors $\exists$ *deux nombres a et b* tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\,\vec{v}$.

Application : démonstration du théorème du toit (exigible BAC : ROC)



Théorème du toit

P_1 et P_2 sont deux plans sécants. Si une droite d_1 de P_1 est parallèle à une droite d_2 de P_2 alors la droite d'intersection Δ de P_1 et P_2 est parallèle à d_1 et d_2.

Notons $\vec{u}$ un vecteur directeur de d_1 et de d_2 et $\vec{w}$ un vecteur directeur deΔ.
Soit $(\vec{u}, \vec{v}_1)$ un couple de vecteurs directeurs de P_1 et $(\vec{u}, \vec{v}_2)$ un couple de vecteurs directeurs de P_2

………

………

………

………

………

………

III. Repérage dans l'espace.

Définition

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. O est un point de l'espace. On appelle repère de l'espace le quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. O est l'origine du repère, le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé base de vecteurs.

Propriété

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Le triplet $(x\,;y\,;z)$ est appelé coordonnées de M.

Démonstration :

- Existence : Soit P le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

………

………

………

………

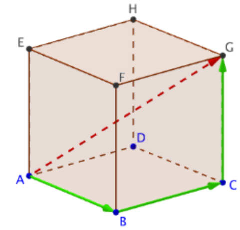
………

………

- on admet l'unicité.

Définition

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Soit $\vec{u}$ un vecteur, associons M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

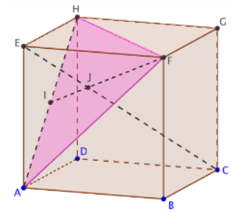


Exemple : ABCDEFGH est un cube.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont non coplanaires.

Le vecteurs $\overrightarrow{AG}$ se décompose en : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$.

☑Savoir-faire : Savoir démontrer l'alignement par décomposition de vecteurs



ABCDEFGH est un cube.

Soit I le milieu de [AH] et J le point de [FI] tel que $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}$.

Démontrer que les points E, J et C sont alignés.

Pour prouver cet alignement, on va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires donc il est possible de décomposer les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ en fonction de ces trois vecteurs.

....

....

....

....

....

....

III. Représentation paramétrique d'une droite.

Propriété

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Soit d une droite passant par un point A (x_A, y_A, z_A) et de vecteur directeur $\vec{u}\,(a, b, c)$. Alors pour tout point M

On a : $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$

Remarque : Ce système s'appelle une représentation paramétrique de la droite *d*.

Démonstration :

$M \in d \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

....

....

....

☑Savoir-faire : Savoir utiliser la représentation paramétrique d'une droite

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Soit les points A $(2, 3, -1)$ et B $(1, -3, 2)$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

....

....

....

....