Produit scalaire.

I. Définition et expressions.

1) Norme d'un vecteur

Définition

Une unité de longueur étant choisie, la norme d'un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est la distance AB. On note $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Conséquences :

- $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$ équivaut à ....
- Pour tout nombre λ et tout vecteur $\vec{u}$, on a $\|\lambda\,\vec{u}\| =$.....................
- Dans un repère orthonormé si $\vec{u}\ (\,x\,;y)$, alors ....

2) Définition du produit scalaire

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\,(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Par convention: $\vec{u}.\vec{u} =$.....................

3) Autres expressions du produit scalaire

Théorème

Dans un repère orthonormé, Soit $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ deux vecteurs. Alors : $\vec{u}.\vec{v} =$..........................

Démonstration :

....

....

....

....

Théorème

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors : $\vec{u}.\vec{v} =$..........................

Démonstration :

....

....

....

....

Cas particulier de deux vecteurs colinéaires.

....

....

II. Propriétés.

1) Propriété de symétrie du produit scalaire

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors : $\vec{u}.\vec{v}=$...........................

2) Opérations sur les produits scalaires

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

❁ $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=$........................... ❁ $\vec{u}.(\lambda\vec{v})=$...........................

3) Identités remarquables

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

❁ $(\vec{u}+\vec{v})^2=$........................... ❁ $(\vec{u}-\vec{v})^2=$........................... ❁..

III. Produit scalaire et orthogonalité.

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=$......

Démonstration :

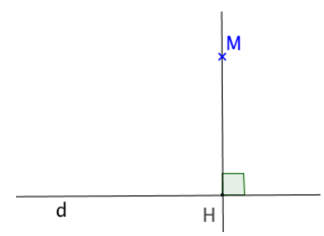
....

....

2) Projection orthogonale

Définition

Soit une droite *d* et un point M du plan. Le projeté orthogonal du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



Propriété

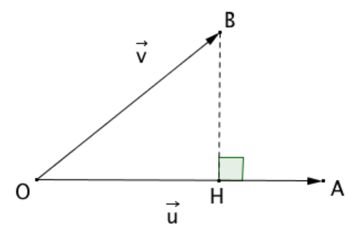
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$. H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA). On a : $\vec{u}.\vec{v}=$...........................

Démonstration :

....

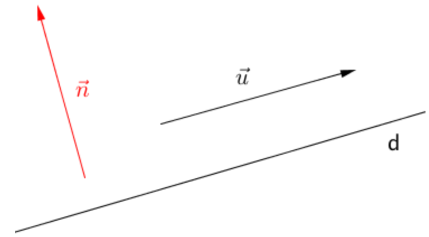
....

....



IV. Produit scalaire et droites.

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ du plan.



Définition

Soit une droite *d*. On appelle vecteur normal à une droite *d*, un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de *d*.

Soit la droite *d* d'équation cartésienne .... Un vecteur directeur de *d* est : ....
Un vecteur normal ....de *d* est tel que : ....Soit : ....
a = ...et b = ... conviennent, ainsi le vecteur .... est un vecteur normal de *d*.

Propriété

❁ Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ où c est un nombre réel à déterminer.

❁ Réciproquement, la droite *d* d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ admet le vecteur $\vec{n}(a;b)$ pour vecteur normal.

Démonstration :

....

....

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal:*

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ du plan, on considère la droite d passant par le point A (-5 ; 4) et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(3;-1)$.Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

....

....

....

V. Produit scalaire et cercles.

Propriété

Une équation du cercle de centre $A(x_A;y_A)$ et de rayon *r* est : ....

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer une équation de cercle:*

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ du plan, on considère le cercle *C* de centre $A(4;-1)$ et passant par le point $B(3;5)$.Déterminer une équation du cercle *C*.

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer les caractéristiques d'un cercle:*

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ du plan, on considère l'ensemble E d'équation : $x^2+y^2-2x-10y+17=0$ .Démontrer que l'ensemble E est un cercle dont on déterminera les caractéristiques (centre, rayon).

....

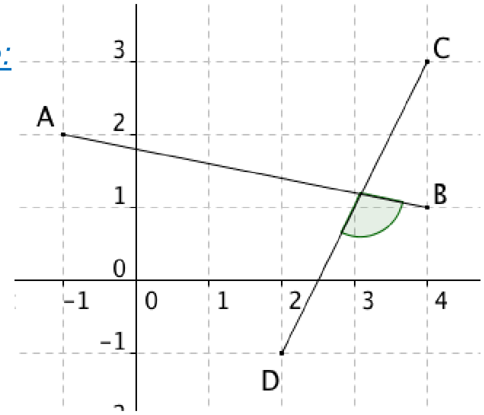
....

VI. Calculs d'angles et de longueurs.

1) Calculs d'angles

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer un angle à l'aide du produit scalaire:*

Calculer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$.



....

....

....

....

....

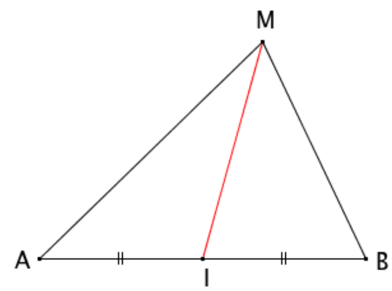
....

2) Théorème de la médiane

Propriété

Soit deux points A et B et I le milieu du segment [AB].Pour tout point M, on a : ....

Démonstration :



....

....

....

....

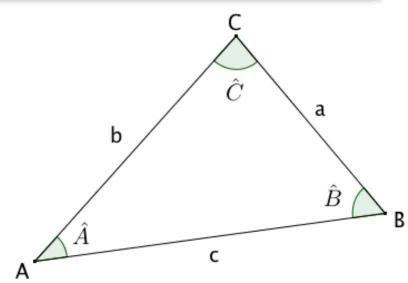
....

3) Théorème d'Al Kashi

Théorème

Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure : ....

Démonstration :



....

....

....

....

VI. Formules de trigonométrie.

1) Formules d'addition

Propriété

Soit a et b deux nombres réels quelconques. On a :

☺ $\cos(a-b)=$ ☺ $\cos(a+b)=$

☺ $\sin(a-b)=$ ☺ $\sin(a+b)=$

Démonstration :

....

....

....

....

....

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules d'addition:*

Calculer $\cos\frac{5\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{5\pi}{12}$.

....

....

....

....

....

2) Formules de duplication

Propriété

Soit a un nombre réel quelconque. On a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2\cos a \sin a$$

☑*Savoir-faire : Savoir calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules de duplication:*

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

....

....

....

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir résoudre une équation trigonométrique:*

Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation $\cos 2x = \sin x$.

....

....

....

....

....

....

....