Probabilités.

I. Vocabulaire (rappels).

Définition

Une expérience est aléatoire lorsqu'elle a plusieurs résultats ou issues et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira.

On considère l'expérience aléatoire suivante : « On lance une pièce 100 fois et on calcule la fréquence d'obtention de Pile ». f =…………………… . On calcule la fréquence d'obtention de Pile pour tous les lancers de la classe. f =……………………

Définition

Les fréquences obtenues d'un événement ***E*** se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expérience augmente (Loi des grands nombres). Cette valeur s'appelle la probabilité de l'événement ***E***.

*Dans l'expérience aléatoire ci-dessus, on appelle **E** l'événement « obtenir Pile ». On a alors p(**E**) =………*

Définition

- ♦ Un évènement est constitué de plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.
- ♦ Les événements élémentaires sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

……
……
……

Définition

- ♦ La probabilité p(***E***) d'un événement ***E*** est telle : $0 \leq p(E) \leq 1$.
- ♦ La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
- ♦ La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

……
……
……
……

Définition

- ♦ On appelle événement contraire d'un ***E***, l'événement qui se réalise lorsque ***E*** ne se réalise pas.
- ♦ On le note $\bar{E}$ et on a $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$.

……
……
……

Définition

- ♦ L'événement "A et B", noté A∩B, est réalisé lorsque les deux événements A et B sont simultanément réalisés.
- ♦ L'événement "A ou B", noté A∪B, est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.

On a $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

……
……

II. Variable aléatoire et loi de probabilité.

1. Variable aléatoire :

On considère l'expérience aléatoire suivante : "On lance un dé à six faces non truqué et on note le nombre de la face supérieure." L'ensemble de toutes les issues possibles Ω = {...; ...; ...; ...; ...; ......} s'appelle l'univers des possibles. On considère l'événement A : "On obtient un résultat pair." On a donc : A = {...; ...; ...}. On considère l'événement élémentaire E : "On obtient un 3". On a donc : E = {3}.

On considère le jeu suivant :

- *Si le résultat est pair, on gagne 2€.*
- *Si le résultat est 1, on gagne 3€.*
- *Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€.*

On a défini ainsi une variable aléatoire X *sur* Ω *= {1; 2; 3; 4; 5; 6} qui peut prendre les valeurs* ....

On a donc : X (1) = ..., X (2) = ..., X (3) = ..., X (4) = ..., X (5) = ..., X (6) = ...

Définition

Lorsqu'à chaque évènement élémentaire d'une expérience aléatoire on associe un nombre réel, on dit qu'on définit une variable aléatoire.

2. Loi de probabilité :

Lorsque $x_1, x_2, \dots x_n$ *sont les valeurs prise par une variable aléatoire* X, *on note* ($X = x_i$) *l'événement «* X *prend la valeur* x_i ». (avec $1 \leq i \leq n$)

Revenons au jeu précédent. Déterminons les probabilités de toutes les valeurs pouvant être prise par X.

....

....

....

On peut résumer les résultats dans un tableau :
On dit que ce tableau définit la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i			
$p(X = x_i)$			

Définition

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité p ($X = x_i$).

☑ *Savoir faire : Savoir déterminer une loi de probabilité :*

On considère l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."
On considère le jeu suivant :
♦ Si on tire un cœur, on gagne 2€. ♦ Si on tire un roi, on gagne 5€. ♦ Si on tire une autre carte, on perd 1€.
On appelle X *la variable aléatoire qui à une carte tirée associe le gain ou la perte correspondant.*
Déterminer la loi de probabilité de X.

....

....

....

....

....

....

....

3. Espérance d'une loi de probabilité :

Définition

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est le nombre noté E(X) défini par :

$$E(X) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_i) + \ldots + x_n \times p(X = x_n).$$

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer l'espérance d'une loi de probabilité :*

Déterminer l'espérance du jeu précédent.

....
....
....
....
....

Remarque : L'espérance mathématique peut être interprétée comme une valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétition.

Exercice bilan : Une loterie est constituée de 1000 billets vendus 1 € chacun. Parmi les billets vendus, un permet de gagner 400 €, deux permettent de gagner 100 € et dix rapportent 10 €.

1. *Un joueur achète un billet. On appelle G la variable aléatoire qui à un billet associe le gain du joueur.*
   - **a.** *Définir la loi de probabilité de G.*
   - **b.** *Calculer E(G).*
   - **c.** *Le jeu rapporte-t-il à l'organisateur de la loterie ou aux joueurs ?*

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Pour être sûre de gagner, une personne achète tous les billets.
   - **d.** *Quelle est le bilan financier de son opération ?*
   - **e.** *Quelle est la perte moyenne par billet acheté ?*

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....