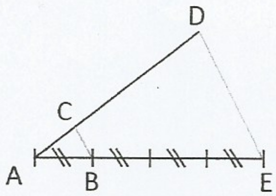
Agrandissements et réductions.

I. Exemples.

a) Avec des triangles.

Dans les trois exemples suivants on suppose que les droites (CB) et (DE) sont parallèles.

☺ Exemple 1 :



Les droites (CD) et (BE) sont sécantes en A et les droites (CB) et (DE) sont parallèles donc nous sommes dans une configuration de Mr Thalès et donc d'après le théorème de Mr Thales, les triangles ACB et ADE ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles.

AE = 4 × AB Donc AD = 4 × AC et DE = 4 × CB

Ou encore $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB} = 4$

On dit que le triangle ADE est un agrandissement du triangle ACB de coefficient 4.

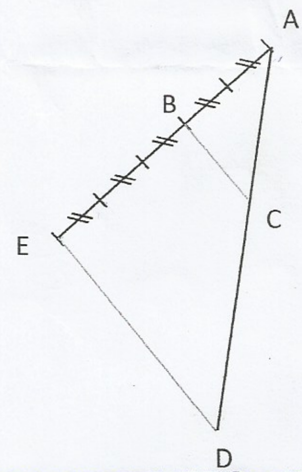
☺ Exemple 2 :

Les droites (EB) et (DC) sont sécantes en A et les droites (BC) et (ED) sont parallèles donc nous sommes dans une configuration de Mr Thalès et donc d'après le théorème de Mr Thales, les triangles ABC et ADE ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles.

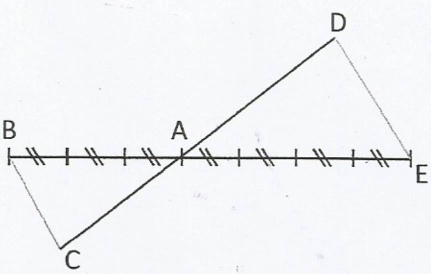
AE = $\frac{5}{2}$ × AB Donc AD = $\frac{5}{2}$ × AC et ED = $\frac{5}{2}$ × BC

Ou encore $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{5}{2}$

Le coefficient d'agrandissement pour passer du triangle ABC au triangle ADE est égal à $\frac{5}{2}$



☺ Exemple 3 :



Les droites (EB) et (CD) sont sécantes en A et les droites (DE) et (BC) sont parallèles donc nous sommes dans une configuration de Mr Thalès et donc d'après le théorème de Mr Thales, les triangles ABC et ADE ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles.

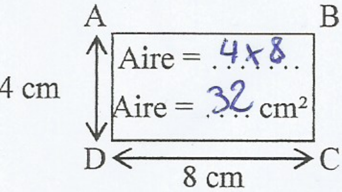
AE = $\frac{4}{3}$ × AB Donc DC = $\frac{4}{3}$ × AC et DE = $\frac{4}{3}$ × BC

Ou encore $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB} = \frac{4}{3}$

Le coefficient d'agrandissement pour passer du triangle ABC au triangle ADE est $\frac{4}{3}$

Le coefficient de réduction pour passer du triangle ADE au triangle ABC est égal à $\frac{3}{4}$

b) Cas général.



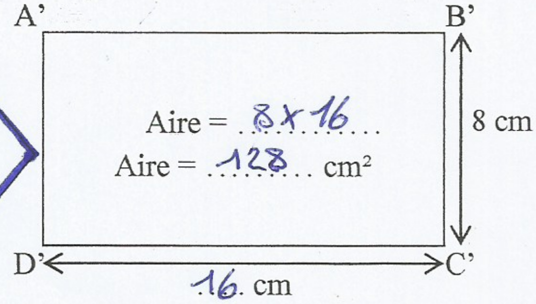
Aire = 4×8

Aire = 32 cm²

Le coefficient d'agrandissement est égal à 2

Le périmètre est multiplié par 2

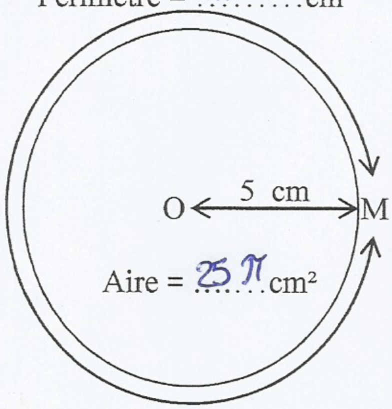
L'aire est multipliée par $\frac{128}{32}$ = 4 = 2^2



Aire = 8×16

Aire = 128 cm²

Périmètre = 10×π cm



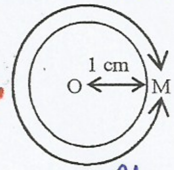
Aire = 25π cm²

Le coefficient réduction est égal à $\frac{1}{5}$

Le périmètre est multiplié par $\frac{1}{5}$

L'aire est multipliée par $\frac{\pi}{25\pi}$ = $\frac{1}{25}$ = $\left(\frac{1}{5^2}\right)$

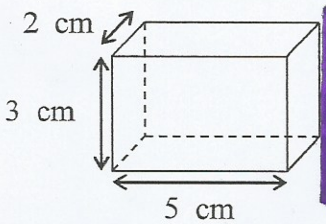
Périmètre = 2π cm



Aire = 1π cm²

Volume = 2×3×5

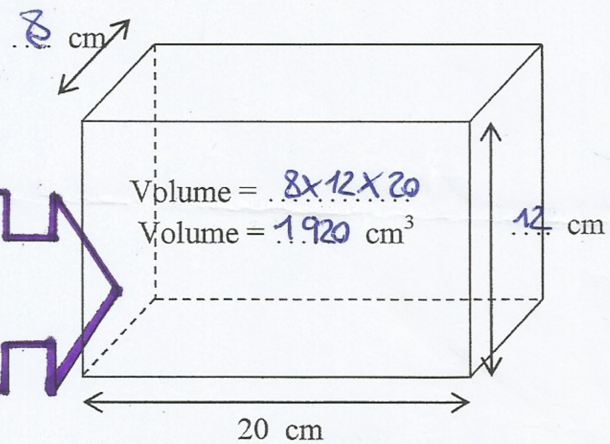
Volume = 30 cm³



Le coefficient d'agrandissement est égal à 4

Les longueurs sont multipliées par 4

Le volume est multiplié par $\frac{1920}{30}$ = 64 = 4^3



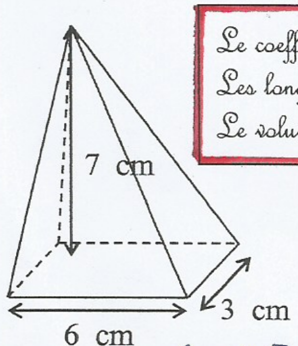
Volume = 8×12×20

Volume = 1920 cm³

Le coefficient d'agrandissement est égal à 3

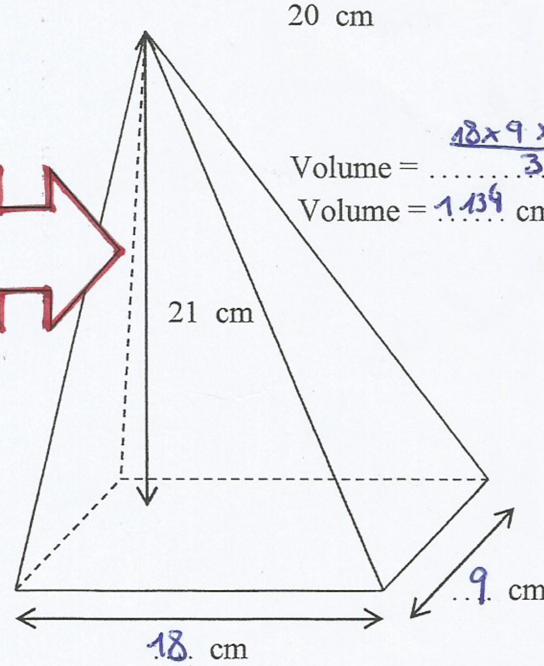
Les longueurs sont multipliées par 3

Le volume est multiplié par 27 = 3^3



Volume = $\frac{6\times3\times7}{3}$

Volume = 42 cm³



Volume = $\frac{18\times9\times21}{3}$

Volume = 1134 cm³

II. Propriétés.

Propriété

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :

- Les longueurs sont multipliées par k...
- Les aires sont multipliées par k^2...
- Les volumes sont multipliés par k^3...

Exemple :

☺Un triangle a une aire de 18,5 m². Quelle est l'aire du triangle obtenu après un agrandissement de coefficient 3,7 ?

$(3,7)^2 \times 18,5 = 253,2$ m²

☺Un cône a une base de rayon 51 cm et 32 cm de hauteur. Quelle est le volume du cône obtenu après une réduction au tiers ?

$V_{départ} = \frac{32 \times (51)^2 \times \pi}{3} = 27\,744\pi$

$V_{obtenu} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times V_{départ} = \frac{1}{27} \times 27\,744\pi = \frac{9\,248}{9}\pi$

☺Une figure a une aire de 16,5 cm2. Après transformation, elle a une aire de 103,125 cm². Est-ce une réduction ou un agrandissement ? Quel est le coefficient ?

$A_{obtenu} = k^2 \times A_{départ}$

$103,125 = k^2 \times 16,5$

$k^2 = \frac{103,125}{16,5} = 6,25$

Donc $k = \sqrt{6,25}$ ou $k = -\sqrt{6,25}$ mais $k > 0$ Donc $k = \sqrt{6,25} = 2,5$

☺ On fait subir un agrandissement de coefficient 5 à une pyramide. La pyramide obtenue a un volume de 2000 cm³. Quel était le volume de la pyramide de départ ?

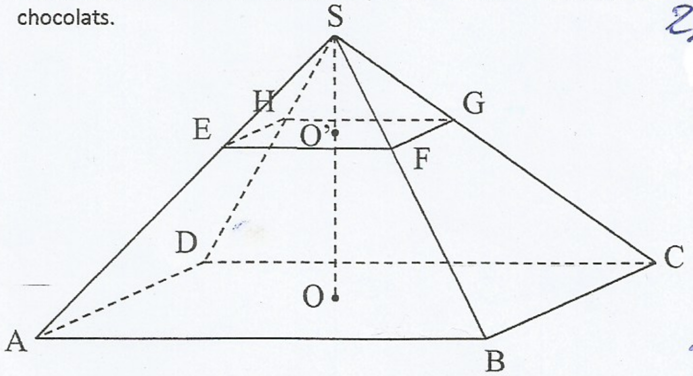
$V_{obtenu} = k^3 \times V_{départ}$

$2000 = 5^3 \times V_{départ}$

$V_{départ} = \frac{2000}{5^3} = \frac{2000}{125} = 16$

Exemple type brevet :

Une boîte de chocolats a la forme d'une pyramide régulière de base carrée, sectionnée par un plan parallèle à la base. La partie supérieure est le couvercle et la partie inférieure contient les chocolats.



On donne : AB = 30 cm SO = 18 cm SO' = 6 cm

1. Calculer le volume de la pyramide SABCD.

2. En déduire celui de la pyramide SEFGH.

3. Calculer le volume du récipient ABCDEFGH qui contient les chocolats.

1) $V_{SABCD} = \frac{30 \times 30 \times 18}{3} = 5\,400$ cm³

2) On a sectionné la pyramide SABCD par un plan parallèle à la base donc la pyramide SEFGH est une réduction de coefficient k de SABCD.

$SO' = k \times SO$ donc $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$V_{SEFGH} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times V_{SABCD} = \frac{5400}{27} = 200$

3) $V = V_{SABCD} - V_{SEFGH} = 5\,400 - 200 = 5\,200$ cm³