Loi binomiale.

I. Répétition d'expériences identiques et indépendantes :

☺ *On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).*
☺ *Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.*

Définition

Plusieurs expériences sont identiques et indépendantes si :
- elles ont les mêmes issues
- chaque issue possède la même probabilité dans chaque expériences.

II. Schéma de Bernoulli :

Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à 2 issues que l'on peut nommer "succès" ou "échec".

Exemples :
un lancé de pièce : succès → "obtenir pile"
un lancé de dé : succès → "obtenir 5"

Définition

Notons X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec, on dit que X suit une loi de Bernoulli.

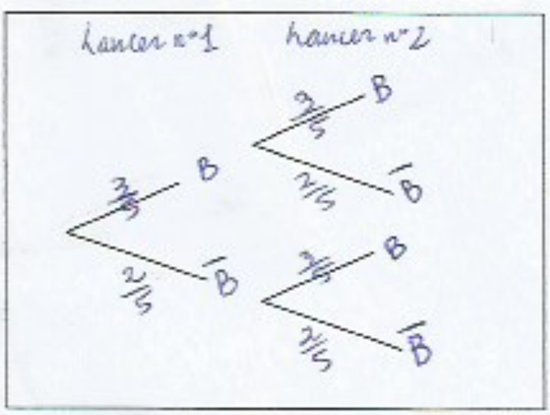
Exemple : Un jeu de dé est tel que le joueur gagne lorsque le 6 sort et perd dans le cas contraire. Appelons « succès » l'événement S « Sortie du 6 ».
Si le dé n'est pas truqué, on a $p(S) = \frac{1}{6}$ *et* $p(\bar{S}) = \frac{5}{6}$
La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 si le 6 sort et la valeur 0 dans les autres cas suit une loi de Bernoulli.

x_i	1	0
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Définition

Lorsqu'on effectue la répétition de plusieurs épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, on dit qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

Exemple : On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne.
☺ *On répète l'expérience deux fois de suite.*
On note B l'événement « On tire une boule blanche ».On peut représenter l'ensemble des issues par un arbre.



Soit X, la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues. Les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; et 2

On a : $P(X=0) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

$P(X=1) = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$

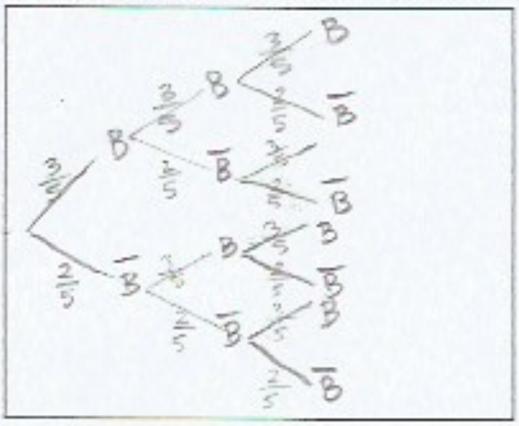
$P(X=2) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$

L'espérance est $E(X) = 0 \times \frac{4}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 2 \times \frac{9}{25} = 0 + \frac{12}{25} + \frac{18}{25} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$

☺ On répète l'expérience trois fois de suite



Soit X, la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues. Les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; et 3

On a : $P(X=0) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

$P(X=1) = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = 3 \times \frac{12}{125} = \frac{36}{125}$

$P(X=2) = 3 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 3 \times \frac{18}{125} = \frac{54}{125}$

$P(X=3) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{125}$

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

L'espérance est $E(X) = 0 \times \frac{8}{125} + 1 \times \frac{36}{125} + 2 \times \frac{54}{125} + 3 \times \frac{27}{125}$

$E(X) = 0 + \frac{36}{125} + \frac{108}{125} + \frac{81}{125} = \frac{225}{125} = 1{,}8$

III. Loi binomiale :

Définition

On réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Pour chacune d'elles, on note p la probabilité d'obtenir un succès. La loi de probabilité de la variable aléatoire X comptant le nombre de succès est appelé loi binomiale de paramètre n et p. On note cette loi $B(n\ ,\ p)$.

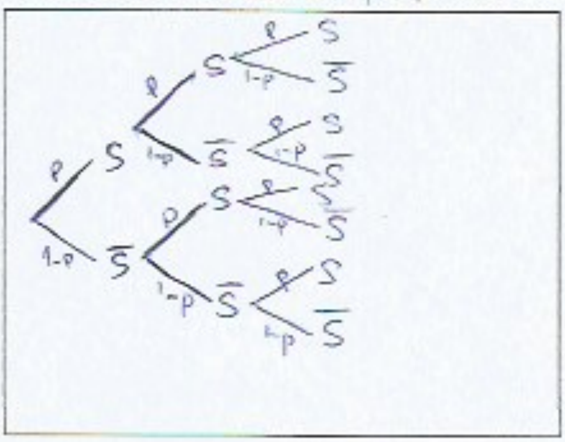
Reprenons les exemples précédents :

X suit la loi binomiale $B(2 ; \frac{3}{5})$ | Dans l'exemple n°2, X suit la loi binomiale $B(3 ; \frac{3}{5})$

Je lance une pièce équilibrée 100 fois, soit X la variable aléatoire associée aux nombres de piles obtenues. X suit $B(100 ; \frac{1}{2})$

☑ *Savoir faire : Savoir déterminer $B(3\ ,\ p)$ avec un arbre:*

On réalise un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Pour chacune d'elles, on note p la probabilité d'obtenir un succès.



Soit X, la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus. Les valeurs prises par X sont

On a :

$P(X=0) = (1-p)^3$

$P(X=1) = 3 \times p \times (1-p)^2$

$P(X=2) = 3 \times (1-p) \times p^2$

$P(X=3) = p^3$

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$(1-p)^3$	$3 \times p \times (1-p)^2$	$3 \times (1-p) \times p^2$	p^3

Remarque : Dans l'arbre précédent, il existe 3 chemins réalisant 2 succès pour 3 répétitions. On dit aussi qu'il y a 3 combinaisons de 2 succès parmi 3 répétitions. On appelle ce nombre un coefficient binomial et on le note : $\binom{3}{2}$

Définition

On appelle $\binom{n}{k}$ un coefficient binomial. C'est le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre représentant l'expérience.

☑ Savoir-faire : Savoir calculer avec une calculatrice un coefficient binomial $\binom{n}{k}$:

	Casio	Texas	Tableur
	Touche **OPTN**, puis choisir ▷ puis *PROB* puis *nCr*	Touche **MATH**, puis choisir *PRB*, puis Combinaison	Fonction **COMBIN**
Syntaxe	*n* **nCr** *k*	*n* **Combinaison** *k*	=COMBIN(n;k)

1) Dans un arbre de 10 lancers d'une pièce équilibrée, combien y aura-t-il de chemins ayant exactement 3 Piles ?
$\binom{10}{3}$ Dans un arbre de 10 lancers, il y aura 120 chemins ayant exactement 3 Piles.

2) Calcule le nombre de combinaisons de 20 succès parmi 40 épreuves.
$\binom{40}{20}$ Parmi 40 épreuves, il y a $1,37 . 10^{11}$ combinaisons de 20 succès

Propriété

On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètre n et p.
La probabilité d'obtenir k succès est : $P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

☑ Savoir-faire : Savoir calculer une probabilité en utilisant la loi binomiale :

1) Dans un jeu de 52 cartes, on tire 100 cartes avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 30 fois un roi ?
Soit X la variable aléatoire associé au nombre de roi obtenus. X suit la loi binomiale $B(100 ; \frac{1}{13})$. $P(X=30) = \binom{100}{30} \times \left(\frac{1}{13}\right)^{30} \times \left(\frac{12}{13}\right)^{70}$

2) A Kuala Lumpur, 70% des personnes ont un ipad. On interroge 100 personnes. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 50 possesseurs d'un ipad ?
On interroge 100 personnes. Soit X la variable aléatoire associé au nombre de possesseurs d'ipad sur les 100. X suit la loi binomiale $B(100 ; 0,7)$ donc
$P(X=50) = \binom{100}{50} \times 0,7^{50} \times 0,3^{50} = 1,30 \times 10^{-5}$
Remarque : C'est parce que la population à KL est grande qu'on peut considérer que X suit la loi binomiale

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit $B(n ; p)$ alors $E(X) = np \quad V(X) = np(1-p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

☑ Savoir-faire : Savoir calculer l'espérance de la loi binomiale :

1) Dans un jeu de 52 cartes, on tire 100 cartes avec remise. On réalise l'expérience plusieurs fois, combien va-t-on en moyenne obtenir de rois ?
Soit X la variable associé au nombre de rois obtenus. X suit $B(100 ; \frac{4}{52})$ $E(X) = 100 \times \frac{1}{13} = \frac{100}{13} \simeq \boxed{7,7}$

2) A Managua, 70% des personnes ont un ipad. On interroge 100 personnes. On réalise l'expérience plusieurs fois, combien va-t-on en moyenne obtenir de possesseurs d'un ipad ?
X suit $B(100 ; 0,7)$ donc $E(X) = 100 \times 0,7 = \boxed{70}$

☑ Savoir-faire : Savoir obtenir la loi binomiale avec un tableur :

On lance une pièce équilibrée 100 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 40 fois Pile ?
Soit X la variable aléatoire associée au nbre de Pile. X suit $B(100 ; 0,5)$. $P(X=40) = 0,0108$

	Casio	Texas	Open Office	Excel
Syntaxe	Touche **OPTN**, puis choisir STAT, puis DIST, puis BINM, puis Bpd ou Bcd (voir p. 270)	Menu distrib (2nde var), puis choisir binomFdp(ou binomFRép(, voir p. 274	Fonction **LOI.BINOMIALE**	
$P(X=k)$	BinomialPD(k,n,p)	binomFdp(n,p,k)	=LOI.BINOMIALE(k;n;p;0)	=LOI.BINOMIALE(k;n;p;FAUX)
$P(X \leq k)$	BinomialCD(k,n,p)	binomFRép(n,p,k)	=LOI.BINOMIALE(k;n;p;1)	=LOI.BINOMIALE(k;n;p;VRAI)

Propriété

Pour tous entiers n et k:
- si $0 \leq k \leq n$ alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- si $0 \leq k \leq n-1$ alors $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

IV. Utiliser des outils pour la loi binomiale :

On considère l'expérience aléatoire « on lance une pièce de monnaie équilibrée ». On répète l'expérience 20 fois. Soit X, la variable aléatoire qui compte le nombre de « Pile » obtenus. Les expériences sont identiques et indépendantes. X suit donc la loi binomiale ..$B(20 ; 0,5)$

On utilise un tableur pour obtenir la loi de probabilité de X et on obtient :

Loi binomiale de paramètres n=20 et p=0,5

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p(X=k)	9.53674E-07	1.9073E-05	2E-04	0.001	0.005	0.015	0.037	0.074	0.12	0.16	0.176	0.16	0.12	0.074	0.037	0.015	0.005	0.001	2E-04	2E-05	1E-06

1. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu exactement 8 fois « Pile ».

$P(X=8) = 0,12$ .... Vérifie avec la formule : $P(X=8) = \binom{20}{8} \times 0,5^{8} \times 0,5^{12} = 0,12$ ok !

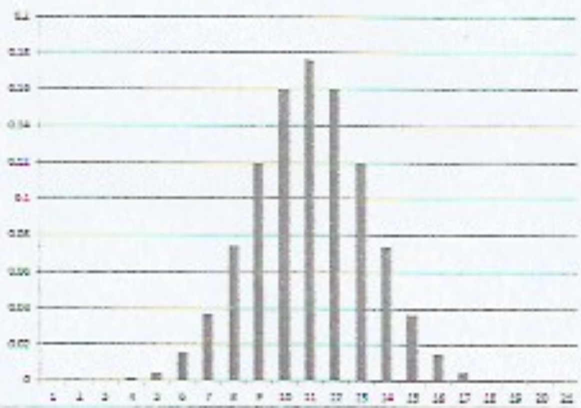
2. A l'aide du tableau, déterminer $p(X=12)$; $p(X=18)$; $p(X \leq 3)$; $p(6 \leq X \leq 9)$

$p(X=12) \simeq 0,12$; $p(X=18) \simeq 0,0002$; $\boxed{p(X \leq 3)} = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) \simeq 0,0013$

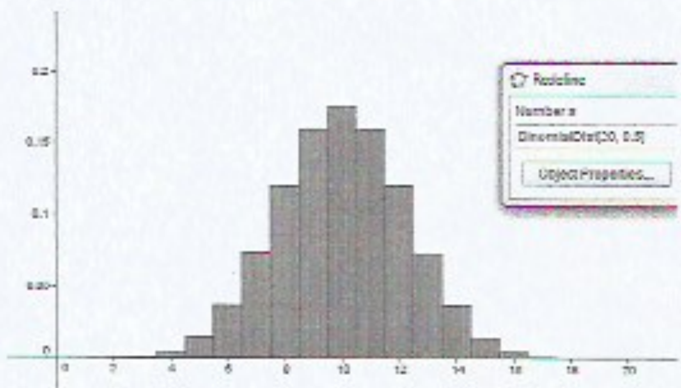
$\boxed{p(6 \leq X \leq 9)} \simeq 0,4119$

On peut représenter la loi binomiale par un diagramme en bâtons

☺ Avec le tableur :

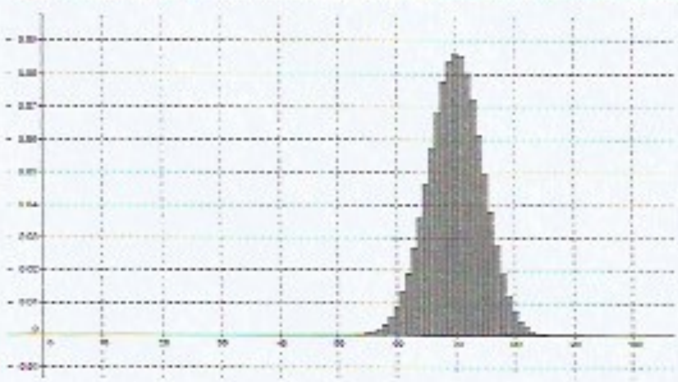


☺ Avec le tableur géogébra :



Remarque : L'espérance de la loi binomiale $B(20 , 0,5)$ est ..10..... cela correspond à .. l'axe de symétrie

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser un diagramme en bâton qui représente la loi binomiale :*



1) On a représenté par un diagramme en bâton une loi binomiale de paramètre n et p. On sait que n=100 et que son espérance est 70. Calcule p.

$E(X) = np = 100p = 70$ Donc $p = \frac{70}{100} = 0,7$

2) Imagine un énoncé qui soit cohérent avec cette représentation.

Sur une population 70 % des gens ont un ordinateur