Suites arithmétiques.

I. Définition d'une suite arithmétique.

On considère la suite (u_n) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 3. Si le premier terme est égal à 2, les premiers termes successifs sont : $u_0 = 2$ $u_1 = u_0 + 3 = 5$ $u_2 = u_1 + 3 = 8$ $u_3 = u_2 + 3 = 11$. *De façon plus générale, pour tout nombre entier n, on a* $u_{n+1} = u_n + 3$

On dit que la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 *et de premier terme* $u_0 = 2$.

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est une <u>suite arithmétique</u> s'il existe un nombre r tel que, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$

Le nombre r est appelé la raison de la suite (u_n).

☑ *<u>Savoir faire : Savoir démontrer qu'une suite est arithmétique :</u>*

1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 2n - 3$ est-elle arithmétique ?

$u_0 = -3$; $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $u_3 = 3$; $u_4 = 5$ ... u_n semble être arithmétique de raison 2. Prouvons-le

$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 3 - (2n-3) = 2n + 2 - 3 - 2n + 3 = 2$ Donc pour tout n $u_{n+1} = u_n + 2$

Donc (u_n) est arithmétique de raison 2.

2) La suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 + 2$ est-elle arithmétique ?

$u_0 = 2$; $u_1 = 3$; $u_2 = 6$; $u_3 = 11$; $u_4 = 18$ ... On remarque que $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$

(u_n) n'est pas arithmétique

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 2 - (n^2 + 2) = n^2 + 2n + 1 + 2 - n^2 - 2 = 2n + 1$ la valeur dépend de n.

Définition

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors, pour tout n, $u_n = u_0 + nr$.

<u>Démonstration :</u>

La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation ....

En calculant les premiers termes :

$u_{n+1} = u_n + r$

$u_1 = u_0 + r = u_0 + 1 \times r$

$u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2 \times r$

$u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r$

$u_4 = u_3 + r = u_0 + 3r + r = u_0 + 4r$

Donc $\forall n$ $u_n = u_0 + nr$

Exemple : On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

$u_1 = u_0 + 1 \times 2 = 5$ $u_{10} = u_0 + 10 \times 2 = 3 + 10 \times 2 = 23$; $u_{100} = u_0 + 100 \times 2 = 3 + 100 \times 2 = 203$

☑ *<u>Savoir faire : Savoir déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique :</u>*

1) Soit (u_n) la suite arithmétique tel que $u_3 = 5$ et $u_7 = 13$. Détermine sa raison et son premier terme.

$u_3 = u_0 + 3 \times r = 5$ $u_7 = u_0 + 7 \times r = 13$ $u_7 - u_3 = 4 \times r = 8$ Donc $r = 2$

$u_0 + 3 \times 2 = 5$ Donc $u_0 = -1$

2) Calcule u_{100}.

$u_{100} = u_0 + 100 \times r = -1 + 100 \times 2 = 199$

II. Sens de variations d'une suite arithmétique.

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout nombre entier n, $u_n = 2n - 3$. Etudions ses variations.

$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 3 - (2n-3) = 2n + 2 - 3 - 2n + 3 = 2$ $u_{n+1} - u_n > 0$ donc $u_{n+1} > u_n$

donc la suite u_n est croissante.

Propriété

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors :

- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

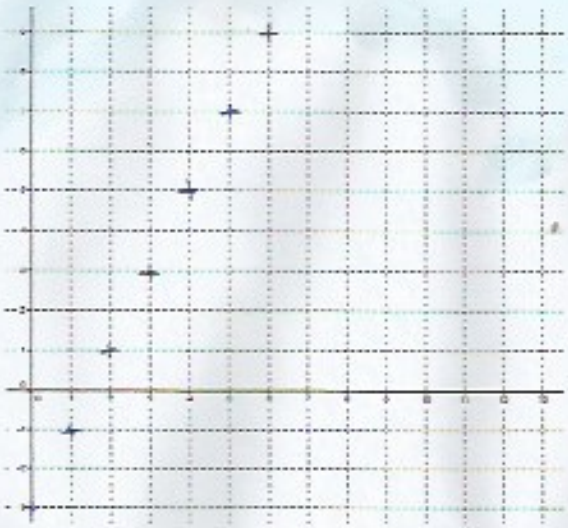
Démonstration :

(u_n) est arithmétique de raison r donc $\forall n$ $u_{n+1} = u_n + r$
soit $\forall n$ $u_{n+1} - u_n = r$

Donc
- Si $r > 0$ $u_{n+1} - u_n > 0$ Donc $u_{n+1} > u_n$ Donc (u_n) est
- Si $r < 0$ $u_{n+1} - u_n < 0$ Donc $u_{n+1} < u_n$ Donc (u_n) est

III. Représentation graphique d'une suite arithmétique.

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout entier n, $u_n = 2n - 3$. Construire sa représentation graphique.



Tableur

	A	B
1	n	Un
2	0	−3
3	1	−1
4	2	1
5	3	3
6	4	5
7	5	7
8	6	9
9	7	11
10	8	
11	9	
12	10	
13	11	

$2 \times A_2 - 3$

Propriété

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

IV. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Propriété

Pour tout entier naturel non nul n, on a : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration :

$\frac{n(n+1)}{2}$ $\quad 1+2+3+\ldots+n$

On pose $S = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4\ldots+(n-1)+n$

$S = n + (n-1) + \ldots 2 + 1$

$2S = (n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots\ldots+(n+1)+(n+1)$

$2S = n(n+1)$ $\qquad S = \frac{n(n+1)}{2}$

☑ *Savoir faire : Savoir calculer la somme des termes d'une suite arithmétique :*

Calcule les sommes S_1 et S_2 suivantes : $S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 348$. $\quad S_2 = 33 + 36 + 39 + \ldots\ldots + 267$.

$S_1 = \frac{348 \times 349}{2} = 60726$

$S_2 = 33 + 33 + 3\times 1 + 33 + 3\times 2 + \ldots\ 33 + 3 \times 78$

$S_2 = 33 \times 79 + 3 \times \frac{78 \times 79}{2}$ $\times 39$

$S_2 = 11850$