Suites géométriques.

I. Définition d'une suite géométrique.

On considère la suite (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égal à 3. Si le premier terme est égal à 2, les premiers termes successifs sont : u_0=...... ; u_1=..........=...... ; u_2=..........=...... ; u_3=..........=...... . De façon plus générale, pour tout nombre entier n, on a u_{n+1}=.................
On dit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison .... et de premier terme ....

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est une <u>suite géométrique</u> s'il existe un nombre q tel que, pour tout n, u_{n+1}=......... .
Le nombre q est appelé la <u>raison</u> de la suite (u_n).

<u>Exemple concret :</u> On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élève à 4%.Chaque année, le capital est multiplié par ....Ce capital suit une progression géométrique de raison ....
....

☑ <u>*Savoir faire : Savoir démontrer qu'une suite est géométrique :*</u>

1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 2^{n+3}$ est-elle géométrique ?

....
....
....

Définition

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple : On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

....
....

☑ <u>*Savoir faire : Savoir déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique :*</u>

1) Soit (u_n) la suite géométrique tel que $u_2 = 12$ et $u_5 = -96$. Détermine sa raison et son premier terme.

....
....
....
....

II. Sens de variations d'une suite géométrique.

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout nombre entier n, $u_n = 3 \times 2^n$. Etudions ses variations.

....
....
....

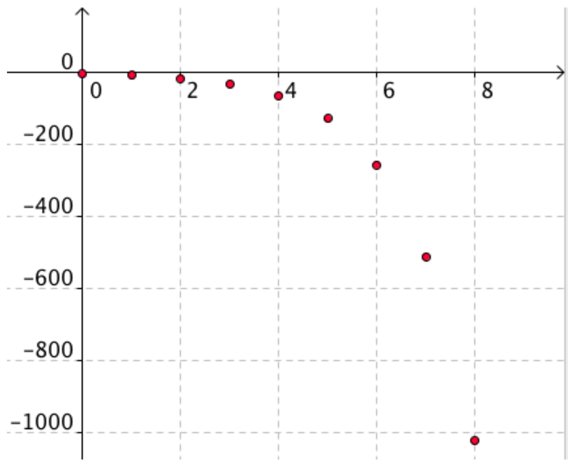
Définition

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, et de premier terme non nul u_0 alors :

- Pour $u_0 > 0$:
  - ♦ Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
  - ♦ Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Pour $u_0 < 0$:
  - ♦ Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
  - ♦ Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

III. Représentation graphique d'une suite géométrique.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n, par $u_n = -4 \times 2^n$. Voici sa représentation graphique.



	A	B
1	n	u_n
2	0	-4
3	1	-8
4	2	-16
5	3	-32
6	4	-64
7	5	-128
8	6	-256
9	7	-512
10	8	-1024

....
....
....
....
....
....
....

La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = 4 \times 2^n$

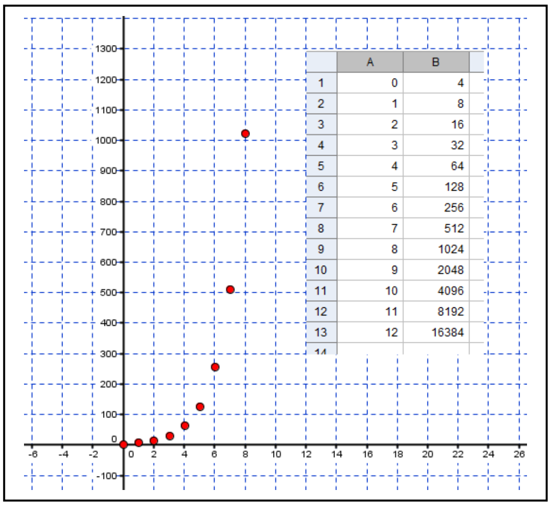
est..........................car ....

....

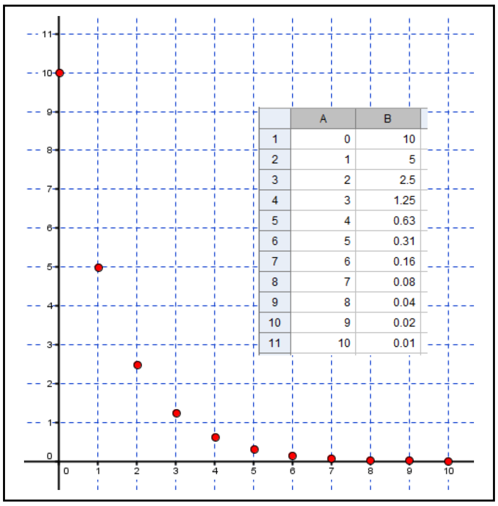
La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

est..........................car ....

....



	A	B
1	0	4
2	1	8
3	2	16
4	3	32
5	4	64
6	5	128
7	6	256
8	7	512
9	8	1024
10	9	2048
11	10	4096
12	11	8192
13	12	16384



	A	B
1	0	10
2	1	5
3	2	2.5
4	3	1.25
5	4	0.63
6	5	0.31
7	6	0.16
8	7	0.08
9	8	0.04
10	9	0.02
11	10	0.01

IV. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Propriété

Pour tout entier naturel non nul n et q un réel différent de 1, on a : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Démonstration :

....
....
....
....

☑ *Savoir faire : Savoir calculer la somme des termes d'une suite géométrique :*

Calcule la somme S = $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{13}$

....
....
....
....

2) Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

....

....

3) Un jeune entrepreneur investit un capital de départ de 20 000 € pour son entreprise. Afin de la dynamiser, il injecte chaque mois une somme supplémentaire à son capital, celle-ci diminue de 30% chaque mois. Calculer le total du capital investi à la fin de la première année.

....

....

....

V. Suite arithmético-géométriques.

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est une arithmético-géométrique s'il existe deux nombres a et b tels que pour tout entier n, $u_{n+1} = a\,u_n + b$.

Exemple : Un investisseur dépose 10000 € sur un compte rémunéré à 5% par an. Chaque année suivante, il dépose 500€ de plus. On note (u_n) la somme épargnée à l'année n.

On a alors : u_{n+1} = ...u_n + ... et u_0 = ... La suite (U_n) est arithmético-géométrique.

☑ Savoir faire : Savoir étudier une suite arithmético-géométrique (exemple BAC):

Une réserve décide d'implanter sur son vaste territoire de savane une nouvelle population d'antilopes, des impalas. Au 1er janvier 2013, 2 500 impalas sont lâchés. Les scientifiques zoologistes estiment que le nombre d'impalas augmentera chaque année de 4 % par le simple jeu des naissances et des décès naturels.
Pour limiter les phénomènes de consanguinité, 50 impalas supplémentaires seront ajoutés chaque année.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'impalas dans cette réserve au 1er janvier de l'année 2013 + n.

1) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}04\, u_n + 50$.

2) Déterminer u_0, u_1 et u_2.

....

....

....

3) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n + 1\,250$.

- **a.** Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- **b.** Exprimer v_n en fonction de n.
- **c.** En déduire que $u_n = 3\,750 \times 1{,}04^n - 1\,250$.

....

....

....

....

....

....

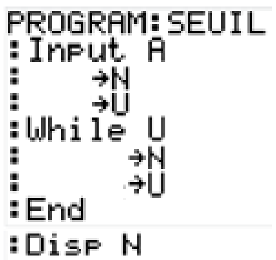
☑ Savoir-faire : Savoir déterminer un seuil avec un algorithme :

4) Après une étude approfondie des zoologues, ce modèle d'évolution ne sera plus valable lorsque la population aura doublé par rapport au 1er janvier 2013. Déterminer à partir de quelle année le modèle d'évolution ne sera plus valable.

Variables : *n*, *u*
***n* prend la valeur 0**
***u* prend la valeur 2500**
Tant que *u* < ....**faire**
***n* prend la valeur** ....
***u* prend la valeur** ....
Fin du Tant que
Afficher ....

....
....
....
....
....
....

Sur TI



Sur Casio