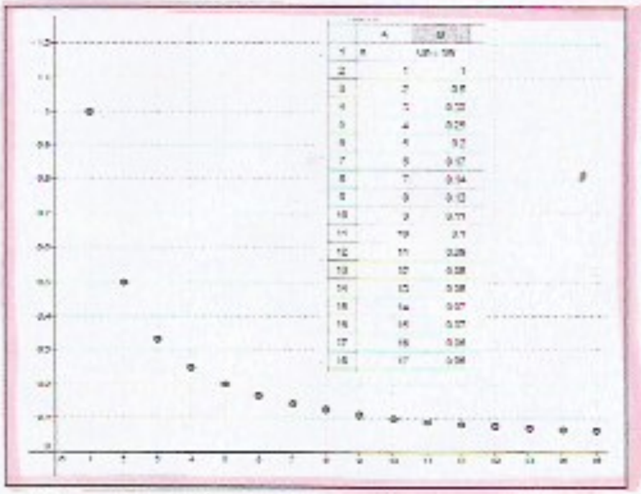
Limite d'une suite.

I. Notion de limite d'une suite.

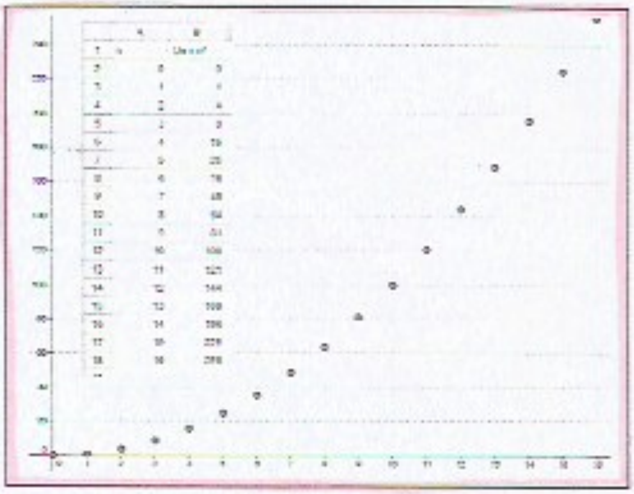
Etudier la limite d'une suite (u_n), c'est se demander ce que deviennent les nombres u_n lorsque n devient de plus en plus grand.
Exemples :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in N^*$.



Quand n devient grand, Un se rapproche de 0.

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$.



Quand n devient grand, Un est plus grand.

II. Suite convergente, suite divergente.

1) Suite convergente

Exemple : Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$.

On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

n	1	2	3	4	5	10	15	50	500
u_n	3	2,5	2,333	2,25	2,2	2,1	2,067	2,02	2,002

Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher de 2.
On dit que la suite (u_n) converge vers 2 et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

2) Suite divergente

Exemple 1 : Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 + 1$
Calculons quelques termes de cette suite : $u_0 = 0^2 + 1 = 1$, $u_1 = 1^2 + 1 = 2$, $u_2 = 2^2 + 1 = 5$, $u_{10} = 10^2 + 1 = 101$, $u_{100} = 100^2 + 1 = 10001$.

Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grand.
On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple 2 : Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la suite (v_n) définie par : $v_{n+1} = (-1)^n v_n$ et $v_0 = 2$

Calculons les premiers termes de cette suite : $v_1 = (-1)^0 v_0 = 2$, $v_2 = (-1)^1 v_1 = -2$, $v_3 = (-1)^2 v_2 = -2$

$v_4 = (-1)^3 v_3 = 2$, $v_5 = (-1)^4 v_4 = 2$.

Lorsque n devient grand, les termes de la suite ne semblent pas se rapprocher vers une valeur unique. On dit que la suite (u_n) diverge.

III. Limite finie ou infinie d'une suite.

1) Limite infinie

Exemple : *La suite (u_n) définie sur N par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$. En effet, les termes de la suite deviennent aussi grand que l'on souhaite à partir d'un certain rang. Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle] a ; $+\infty$ [contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*

Définition

- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle] a ; $+\infty$ [, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle]$-\infty$; b [, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

☑ Savoir-faire : *Savoir utiliser un algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A :*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$. Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$. Ecrire un algorithme permettant de préciser le rang à partir duquel la suite est supérieure à A.

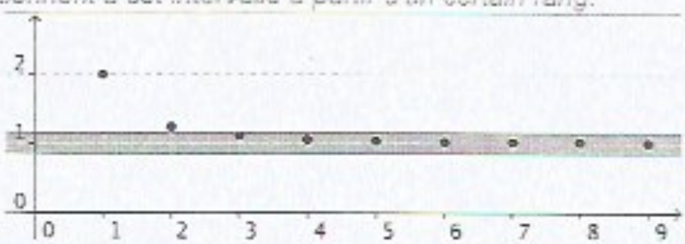
Langage naturel
Entrée
Saisir le réel A
Initialisation
Affecter à n la valeur ….
Affecter à u la valeur …..
Traitement des données
Tant que u …. A
Faire
Affecter à n la valeur ……..
Affecter à u la valeur …..
Sortie
Afficher n

En appliquant cet algorithme avec A = 100 on obtient en sortie n = …..
A partir du terme …, la suite est supérieure à 100.
En langage calculatrice, cela donne :

TI	CASIO
PROGRAM:SEUIL	======SEUIL
:Input A	"A="?→A↵
:0→N	0→N↵
:2→U	2→U↵
:While U<A	While U<A↵
:N+1→N	N+1→N↵
:4*U→U	4×U→U↵
:End	WhileEnd↵
:Disp N	N

2) Limite finie

Exemple : *La suite (u_n) définie sur N* par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ a pour limite 1. En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang. Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.*



Définition

On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Une telle suite est dite convergente.

Définition

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

3) Limites des suites usuelles

Propriété

$\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}=0$.

Exemple de démonstration : Démonstration de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$:

Soit un intervalle ouvert $]-a;a[$, a réel positif non nul, contenant 0

On pose $n_0 = E(\frac{1}{4})+1$ alors $\forall > n_0$ $U_n = \frac{1}{n} < a$ $\forall a\ \exists n_0 = E(\frac{1}{a})+1 \ /\forall n \geqslant n_0$
$U_n \in]-a;a[$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

IV. Opérations sur les limites.

F.I. = Forme Indeterminé

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)=$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FORME INDETERMINÉ

2) Limite d'un produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$	L	$L>0$	$L<0$	$L>0$	$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_nv_n)=$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$	L	L	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$	$L'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $v_n>0$	0 avec $v_n>0$	0 avec $v_n<0$	0 avec $v_n<0$	0	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}=$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

☑ Savoir-faire : *Savoir déterminer une limite :*

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-3\sqrt{n}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2+n}{n+3}$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

a) $U_n = n-3\sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n}-3)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}-3=+\infty$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n-3\sqrt{n}=+\infty$

b) $U_n = \frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{\cancel{n^2}(5+\frac{4}{n^2})}{\cancel{n^2}(4+\frac{3}{n})}$ = $\lim\limits_{n\to+\infty} 5+\frac{4}{n^2}=5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4+\frac{5}{n}=4$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n^2+4}{4n^2+3n}=\frac{5}{4}$

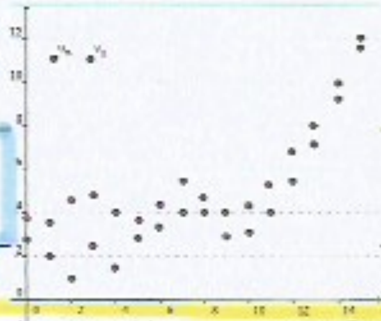
c) $\frac{3n^2+n}{n+3} = \frac{n^2(3+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{3}{n})} = \frac{n(3+\frac{1}{n})}{(1+\frac{3}{n})}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\frac{1}{n}=3$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{3}{n}=1$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$

d) $(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = (\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\times\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$= \frac{n+2-n}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

V. Limites et comparaison.

1) Théorèmes de comparaison



Théorème 1

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration (exigible BAC) :

Pour pouvoir affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$: il faut montrer que $\forall a ; \exists n_0 / \forall n \geq n_0 \quad V_n \in]a ; +\infty[$

On pose $]a ; +\infty[$ = • $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ Donc $\exists n_1 / \forall n \geq n_1 \quad U_n > a$

• $\exists n_2 / \forall n \geq n_2 \quad V_n \geq U_n$

Posons $n_0 = \max(n_1 ; n_2)$ alors $\forall n \geq n_0 \quad V_n \geq U_n > a$ Donc $U_n \in]a ; +\infty[$

Donc $\forall a, \exists n_0 / \forall n \geq n_0 \quad V_n \in]a ; +\infty[$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

Théorème 2

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

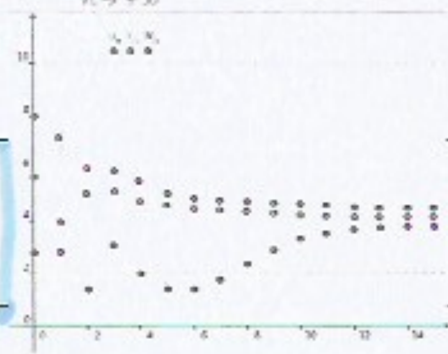
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

☑ **Savoir-faire** : *Savoir déterminer une limite par comparaison:* Déterminer la limite suivante $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+(-1)^n\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n \qquad \forall n \quad n^2 + (-1)^2 \geq n^2 - 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 1 = +\infty$ d'après le Th de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2) Théorème d'encadrement



Théorème des gendarmes

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

Démonstration :

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \ell$ et que $\exists n_0 / \forall n \geq n_0 \quad U_n < V_n \leq W_n$

On pose $I =]a - \ell ; a + \ell[$ intervalle ouvert contenant ℓ : • $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ donc $\exists n_1 / \forall n > n_1 \quad U_n \in I$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \ell$ donc $\exists n_2 / \forall n > n_2 \quad W_n \in I$ Donc pour $n_3 = \max(n_0 ; n_1 ; n_2)$

$\forall n \geq n_3 \quad U_n \leq V_n \leq W_n$ et $U_n \in I$ et $W_n \in I$ Donc $\forall n > n_3 \quad V_n \in I$

Donc $\forall I \ni \ell, \exists n_3 / \forall n > n_3 \quad V_n \in I$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell$

☑ **Savoir-faire** : *Savoir déterminer une limite par encadrement :* Déterminer la limite suivante $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)$

$V_n = 1 + \frac{\sin n}{n} \qquad -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \qquad 1 - \frac{1}{n} \leq V_n \leq 1 + \frac{1}{n}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 1$

V. Limite d'une suite géométrique.

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	n'a pas de limite	0	1	$+\infty$

Démonstration dans le cas $q > 1$ (exigible BAC) ROC :

Prérequis : Pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geq 1+na$ (*inégalité de Bernoulli*)

Si $q > 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

• si $q > 1$ alors $\exists\ a > 0$ / $q = 1 + a$

$q^n = (1+a)^n > 1 + na$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ (car $a > 0$) d'après le th. de comp.

$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ (lorsque $q > 1$)

☑ Savoir-faire : *Savoir déterminer la limite d'une suite géométrique :*

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-2)^n}{3}$, b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n - 3^n\right)$ c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} (-2)^n$ n'a pas de limite. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-2)^n}{3}$ n'existe pas.

b) $2^n - 3^n = 3^n\left(\frac{2^n}{3^n} - 1\right) = 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)$ $\lim 2^n = +\infty$ $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} b) = -$

c) $= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} = 2$

☑ Pondichéry !7 Avril 2015 :

EXERCICE 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1 ; 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1 ; 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.
   a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.
   b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n). Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
   c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.