

Suites bornées et convergence monotone.

I. Suites majorées, minorées, bornées.

Définition

- La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
- La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :

- Les suites de terme général $\cos n$ ou $(-1)^n$ sont
- La suite de terme général n^2 est minorée par

☑ Savoir-faire : Savoir déterminer la limite d'une suite géométrique :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

II. Convergence des suites monotones.

Propriété

Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est majorée par L .

Démonstration par l'absurde :

Théorème de convergence monotone - Admis -

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

Remarque :

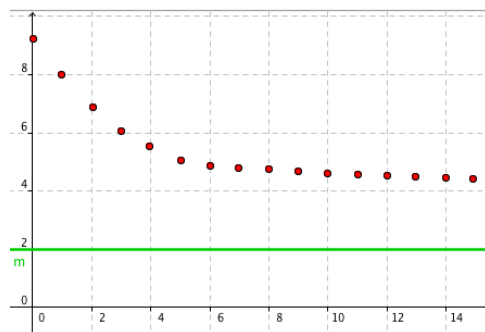
Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.

Dans l'exemple ci-contre, la suite décroissante est minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2.

☑ Savoir-faire : Savoir utiliser le théorème de convergence monotone :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.



Corollaire

- Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration :

Antilles Guyane Juin 2014 :

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{cases}$$

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

- b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .
2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) .
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

- a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n) .
- b. En déduire, que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

- c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 u prend la valeur 2
Traitement :	Tant que ... (1) n prend la valeur ... (2) u prend la valeur ... (3) Fin Tant que
Sortie :	Afficher n