Suites bornées et convergence monotone.

I. Suites majorées, minorées, bornées.

Définition

- La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
- La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :

- Les suites de terme général cos n ou $(-1)^n$ sont bornées entre (-1) et 1
- La suite de terme général n^2 est minorée par 0

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la limite d'une suite géométrique :*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

Initialisation : U_0 2 < 3 1er rang est vrai

Hérédité : on suppose que ∃ k / Uk < 3 montrons que Uk+1 < 3

Uk < 3

$\frac{1}{3}$ Uk < $\frac{1}{3}$ × 3 Donc ∀n U_n < 3

donc la suite (Un) est majorée par 3

$\frac{1}{3}$ Uk + 2 < 3

Donc U_{k+1} < 3

II. Convergence des suites monotones.

Propriété

Soit (u_n) une suite croissante définie sur ℕ. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est majorée par L.

Démonstration par l'absurde :

On suppose que (Un) n'est pas majorée par L alors ∃ no / Uno > L

Posons I =]L-1 ; Uno[L ∈ I (Un) croissant ∀n > no donc Un ∉ I

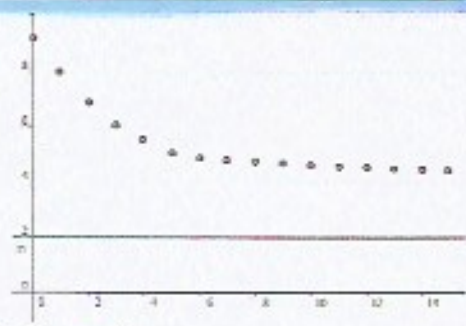
Ce qui n'est pas possible car $\lim\limits_{n \to +\infty}$ = L

Théorème de convergence monotone - Admis -

- Si une suite croissante et majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante et minorée alors elle est convergente.

Remarque :

Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.
Dans l'exemple ci-contre, la suite décroissante est minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2.



☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser le théorème de convergence monotone :*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Initialisation : $U_0 = 2$ $U_1 = \frac{8}{3}$ donc $U_1 > U_0$

Héré = on suppose que Uk+1 > Uk montrons que Uk+2 > Uk+1

$\frac{1}{3}$ Uk+1 + 2 > $\frac{1}{3}$ Uk + 2 la prop est héréditaire donc (Un) est croissante

Or (U_n) est majoré par 3 (voir p.19) donc d'après le th. de convergence monotone (U_n) est convergente.

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$ $\quad U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2$ $\quad$ Donc $\frac{2}{3}L = 2$ $\quad$ Donc $L = 3$

$L = \frac{1}{3}L + 2$ $\quad$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} = 3$

Corollaire

- Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration :

si $(U_n) \nearrow$ non majoré alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

On pose A $\quad (U_n)$ n'est pas majorée $\quad$ Donc $\exists n_0 / U_{n_0} > A$

(U_n) est croissante donc $\forall n \geq n_0 \quad U_n > A$

Donc $\forall n \geq n_0 \quad U_n \in]A ; +\infty[$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

☑ Antilles Guyane Juin 2014 :

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3\times 0,5^n \end{cases}$$

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

   b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0,5^n.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).*
   Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10\times 0,5^n$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

   b. En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0,5^n.$$

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 2
Traitement :	Tant que ... (1)
	u prend la valeur ... (2)
	n prend la valeur ... (3)
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n