

SYSTÈME À DEUX ÉQUATIONS, DEUX INCONNU

I. DÉFINITION

→ Un système à 2 équations et 2 inconnus, se présente en générale sous la forme

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels donnés, on les appelle les **coefficients**.

- x et y sont les nombres **cherchés** (les deux inconnus, d'où le titre ...).

- Une solution du système est en **couple** (x_0, y_0) qui vérifient les deux équations.

- Résoudre un système, c'est trouver tous les **couples solutions** de ce système.

II. VÉRIFIER QU'UN COUPLE EST SOLUTION D'UN SYSTÈME

→ **Méthode** :

- Pour savoir si un couple donné est solution ou non d'un système, il suffit de vérifier qu'il est solution de chacune des équations.

Exemple : les couples $(2; 3)$ et $(-3; 4)$ sont-ils solution du système

$$(S) : \begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 2x - y = -10 \end{cases} \quad \bullet \quad 3 \times 2 + 2 \times 3 = 12 \neq -1$$

Donc $(2; 3)$ n'est pas solution de $3x + 2y = -1$.

- $3 \times (-3) + 2 \times 4 = -9 + 8 = -1$ (ok)

$$\bullet 2 \times (-3) - 4 = -6 - 4 = -10 \quad (\text{ok})$$

→ Donc $(-3; 4)$ vérifie les 2 égalités.

→ Donc $(-3; 4)$ est une solution de (S).

ATTENTION

Ce n'est parce qu'un couple vérifie une équation qui n'est pas solution d'un système. On doit être sûr qu'il vérifie les deux.

III. MÉTHODE DE RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DE 2 ÉQUATIONS, 2 INCONNUS

a) Méthode par substitution

Substituer signifie remplacer. La méthode consiste à exprimer un inconnu en fonction de l'autre dans une équation puis de remplacer cette expression dans l'autre équation.

→ Résoudre le système

$$(S): \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x - 4y = -18 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ 3x - 4(-2x - 1) = -18 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ 3x + 8x + 4 = -18 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ 11x = -22 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \times (-2) - 1 \\ x = \frac{-22}{11} = -2 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

• Vérification

$$2 \times (-2) + 3 = -4 + 3 = -1 \quad (\text{ok})$$

$$3 \times (-2) - 4 \times 3 = -6 - 12 = -18 \quad (\text{ok})$$

Donc le système a une solution qui est le couple $(-2; 3)$

IV. METHODE PAR COMBINAISON LINÉAIRE

On ne change pas les solutions d'un système en multipliant toute une ligne, ni en ajoutant des lignes

$$(S): \begin{cases} x + y = 5 & (L_1) \\ 2x - y = -3 & (L_2) \end{cases} \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{3} \right)$$

$$(S_2): \begin{cases} 3x + 3y = 15 \\ -4x + 2y = 6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 3 \times (L_1) \\ -2 \times (L_2) \end{array}$$

$$(S_3): \begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 + 3(L_1) \\ L_2 \end{array}$$

Ces 3 systèmes ont la même solution.

L'objectif de cette méthode est de faire apparaître un nombre opposé de x ou y , pour les éliminer en ajoutant des lignes.

EXEMPLE

$$(S): \begin{cases} 6x + 3y = 228 \\ 3x + 4y = 169 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \times 4 \\ \times (-3) \end{array}$$

$$(S): \begin{cases} 6x + 3y = 228 \\ -6x - 8y = -338 \end{cases}$$

$$(S): \begin{cases} -5y = -110 \\ 3x + 4y = 169 \end{cases}$$

$$(S): \begin{cases} y = \frac{-110}{-5} = 22 \\ 3x + 88 = 169 \end{cases}$$

$$(S): \begin{cases} y = 22 \\ 3x = 81 \end{cases}$$

$$(S): \begin{cases} y = 27 \\ x = \frac{81}{3} = 27 \end{cases}$$

V. RESOLUTION DE PROBLEME A DEUX INCONNUS

→ Méthode

- Commencer par spécifier le choix des inconnus.
(Soit x le nombre de cd, soit y le nombre de dvd).
- Traduire chacune des phrases de l'énoncé par une équation
- Résoudre le système
- Répondre aux problèmes

→ Exemple

5 croissants et 5 chocolatinnes coûtent 10€.
8 croissants et 3 chocolatinnes coûtent 10€.
Quel est le prix d'un croissant et d'une chocolatinne ?

- Soit x le nombre de croissants et y le nombre de chocolatinnes.

$$(S): \begin{cases} 5x + 5y = 10 \\ 8x + 3y = 10 \end{cases}$$

$$(S): \begin{cases} -3x - 3y = -6 \\ 8x + 3y = 10 \end{cases}$$

$$x = \frac{3}{5}$$

$$(S): \begin{cases} x + y = 2 \\ 5x = 4 \end{cases}$$

$$(S): \begin{cases} y = 2 - 0,8 = 1,2 \\ x = \frac{4}{5} = 0,8 \end{cases}$$

Vérification

- $5 \times 0,8 + 5 \times 1,2 = 4 + 6 = 10$ (ok)
- $8 \times 0,8 + 3 \times 1,2 = 6,4 + 3,6 = 10$ (ok)

Donc le système a une unique solution qui est le couple $(0,8; 1,2)$. Donc un croissant coûte 0,8€ et une chocolatinne 1,20€.

VI. SYSTÈME ET POINT D'INTERSECTION DES POINTS

- Soit $(0; 1; 5)$ un repère, $A(3; 3)$, $B(-1; -5)$, $C(1; -2)$ et $D(0; 1)$.

- 1) Déterminer l'équation réduite de (AB)
- 2) Déterminer l'équation réduite de (CD)
- 3) Construire les droites.
- 4) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de (AB) et (CD) .

- 1) $x_A \neq x_B$, donc l'équation de (AB) sera de la forme $y = mx + p$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-5 - 3}{-1 - 3} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$A \in (AB) \quad y_A = 2 \times x_A + p$$

$$3 = 2 \times 3 + p$$

$$p = 3 - 6$$

$$p = -3$$

Donc l'équation de (AB) est $y = 2x - 3$.

- 2) $x_C \neq x_D$, donc l'équation de (CD) sera de la forme $y = mx + p$

$$m = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{1 - (-2)}{0 - 1} = \frac{3}{-1} = -3$$

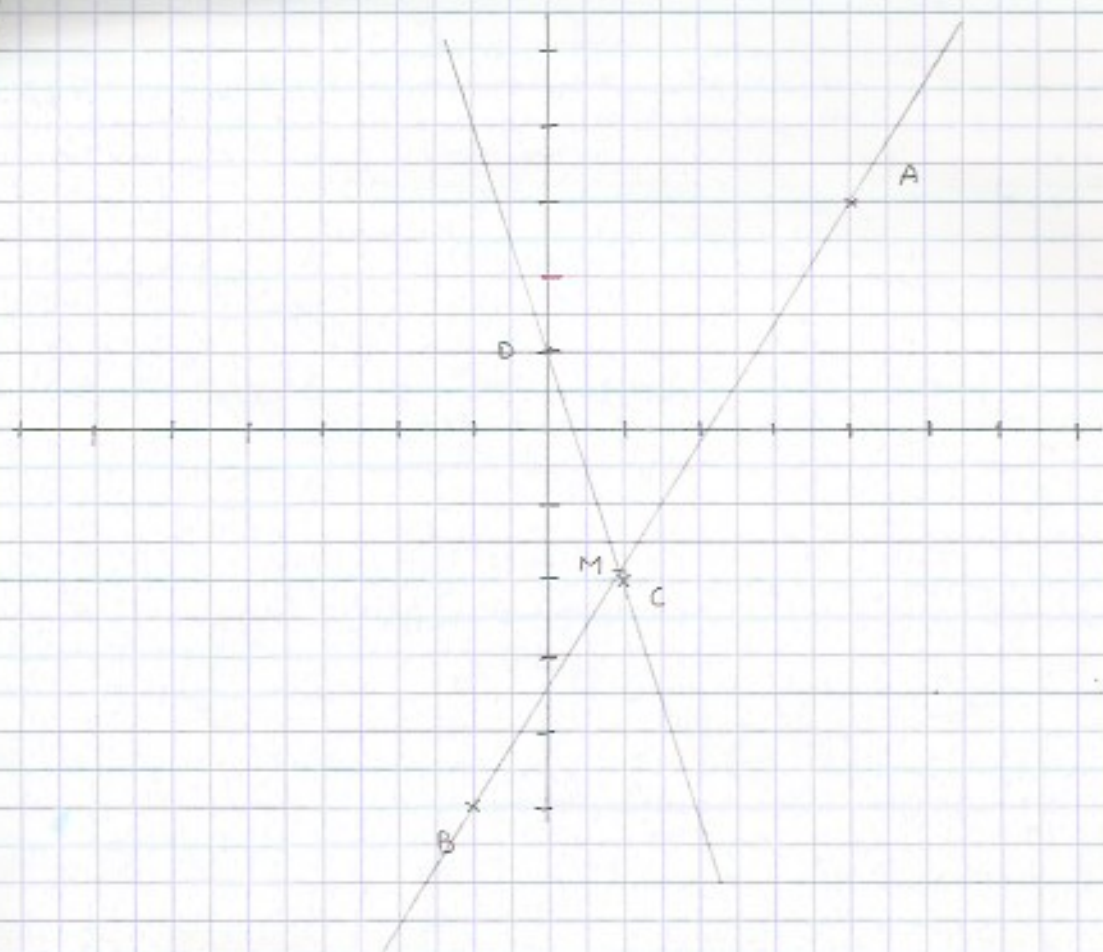
$$C \in (CD) \quad y_C = -3 \times x_C + p$$

$$-2 = -3 \times 1 + p$$

$$p = 1$$

Donc l'équation de (CD) est $y = -3x + 1$

3)



- 4) • Soit M le point d'intersection des 2 droites.
 • $M \in (AB)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation réduite de (AB)

Donc $y_M = 2x_M - 3$

- $M \in (CD)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation réduite de (CD) .

Donc $y_M = -3x_M + 1$

- Donc le couple $(x_M; y_M)$ est solution du système:

$$(S) : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 5x - 4 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = 2 \times \frac{4}{5} - 3 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Vérification (ok)

Donc, le point M a pour coordonnées $(\frac{4}{5}, -\frac{7}{5})$

• Remarque 1

Equation de droites $\rightarrow$ Relation vérifiée par des coordonnées $\rightarrow$ point d'intersection $\rightarrow$ système à 2 équations et 2 inconnues $\rightarrow$ Mais comme tout ceci est logique !

• Remarque 2

Un système à 2 inconnues et 2 équations a-t-il toujours une solution ?

Comme le dit Irene : "No" en effet une équation à 2 inconnues correspond à une équation de droite, résoudre un système correspond à chercher les coordonnées des points d'intersection de deux droites. Si les droites sont parallèles, le système n'aurait pas de solution. Exemple :

$$(S) : \begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

Cela signifie que, si les droites sont confondues, un système peut avoir une infinité de solutions. Exemple :

