Fonctions polynômes du second degré.

α β

I. Définition.

Définition

On appelle fonction polynôme de degré 2 ou trinôme du second degré, toute fonction f définie sur IR par une expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$. où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

☑ *Savoir faire : Savoir reconnaitre les coefficients d'un trinôme du second degré :*
Identifie les coefficients des trinômes suivants :

◆ $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$	◆ $g(x) = x^2 - x$	◆ $h(x) = -x^2 + 3$	◆ $i(x) = (2x + 5)(-x + 4)$
$a = 2$	$a = 1$	$a = -1$	$a = -2$
$b = 3$	$b = -1$	$b = 0$	$b = 3$
$c = -5$	$c = 0$	$c = 3$	$c = 20$

II. Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré.

Exemple :
Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.
On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique : $f(x) = \ldots (x - \ldots)^2 + \ldots$

$f(x) = 2(x^2 - 10x + 5)$
$f(x) = 2[(x-5)^2 - 20]$
$f(x) = 2(x-5)^2 - 40$

Forme générale:

$f(x) = ax^2 + bx + c$
$f(x) = a\left(x^2 + \frac{a}{b}x + \frac{c}{a}\right)$
$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$
$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

Définition

Toute fonction polynôme f du deuxième degré peut s'écrire sous la forme :
$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où α et β sont deux nombres réels.
Cette écriture s'appelle la forme canonique de f.

Remarque : Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, on a alors $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

☑ *Savoir faire : Savoir trouver la forme canonique d'un trinôme du second degré :*
Détermine la forme canonique de la fonction f ayant pour expression $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

$f(x) = -x^2 + 4x - 1$
$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times -1} = \frac{-4}{-2} = 2$

$f(\alpha) = -1 \times 2^2 + 4 \times 2 - 1$
$= -4 + 8 - 1 = -5 + 8 = 3$
$f(x) = -1(x-2)^2 + 3$

III. Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré.

Propriété

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. La courbe représentative de f est une ...parabole......
Son sommet a pour abscisse $x_s = \frac{-b}{2a}$. La droite qui a pour équation $x = \frac{-b}{2a}$ est l'axe de symétrie de la courbe.

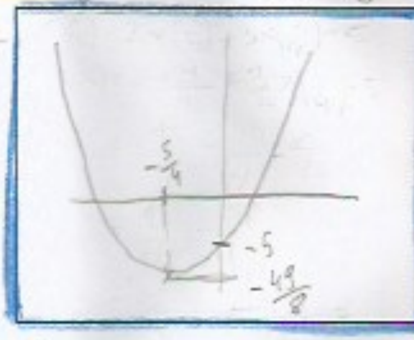
- Si $a < 0$ alors la parabole a les branches tournées vers le ...bas.........
- Si $a > 0$ alors la parabole a les branches tournées vers le ...haut.....

Remarque : En utilisant la forme canonique, on obtient directement les coordonnées du sommet de la parabole.

☑ *Savoir faire : Savoir dresser le tableau de variations d'une fonction trinôme du second degré :*

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 2x^2 + 3x - 5$: $f(x) = 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$

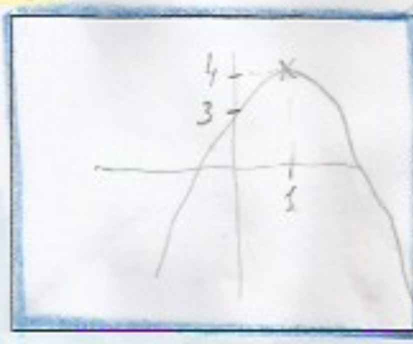
$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
f est une fonction trinôme du second degré. Donc $\mathcal{C}_f$ est une parabole tournée vers le haut car $a > 0$.
$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2\times 2} = \frac{-3}{4}$ $\quad f(\alpha) = 2\times\left(\frac{-3}{4}\right)^2 + 3\times\left(\frac{-3}{4}\right) - 5$



x	$-\infty$	$\frac{-3}{4}$	$+\infty$
variation de f	↘	$\frac{-49}{8}$	↗

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f_2 définie par $f_2(x) = -x^2 + 2x + 3$:

$a < 0$ donc la parabole est tournée vers le bas.
$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2\times -1} = \frac{-2}{-2} = 1$ $\quad f(\alpha) = -1\times 1^2 + 2\times 1 + 3$
$= -1 + 2 + 3$
$= 4$



x	$-\infty$	1	$+\infty$
	↗	4	↘

IV. Résolution d'une équation du second degré.

☑ *Savoir faire : Savoir résoudre une équation produit nul du second degré :*

Résoudre l'équation (E_1) : $(-2x + 3)(3x + 5) = 0$.

$-2x + 3 = 0$ ou $3x + 5 = 0$
$-2x = -3$ $\quad 3x = -5$ $\quad$ Donc $S(E_1) : \left\{\frac{3}{2} ; \frac{-5}{3}\right\}$
$x = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ $\quad x = \frac{-5}{3}$

Remarque : $(-2x + 3)(3x + 5) = \left[-2\left(x - \frac{3}{2}\right)\right]\left[3\left(x + \frac{5}{3}\right)\right]$ .... $= -6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{5}{3}\right)$

☑ *Savoir faire : Savoir résoudre une équation du type (E) : $x^2 = a$:*

Résoudre les équations suivantes :

◆(E_1) : $x^2 = 16$	◆(E_2) : $x^2 = 13$	◆(E_3) : $x^2 = 0$	◆(E_4) : $x^2 = -4$
$x = 4$ ou -4	$\sqrt{13}$ ou $-\sqrt{13}$	$x = 0$	PAS DE SOLUTION DANS $\mathbb{R}$

☑ *Savoir faire : Savoir factoriser une expression avec un facteur commun ou avec une identité remarquable:*

◆ $f(x) = 2(x+1)(x-3) - 3(x+1)^2$

$f(x) = (x+1)(2(x-3) - 3(x+1))$

$f(x) = (x+1)(2x-6-3x-3)$

$(x+1)(-x-9)$

◆ $g(x) = x^2 - 25$

$g(x) = x^2 - 5^2$

$g(x) = (x+5)(x-5)$

◆ $h(x) = (x+1)^2 - (2x+3)^2$

$h(x) = [(x+1)+(2x+3)][(x-1)-(2x+3)]$

$h(x)(3x+4)(-x-2)$

Définition

On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

☑ *Savoir faire : Savoir calculer le discriminant d'un trinôme :*

Dans chaque cas ci-dessous calcule le discriminant :

◆ $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

$a = 2$ $b = 3$ $c = -5$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5)$

$\Delta = 9 + 40 = 49$

◆ $g(x) = x^2 - x$

$a = 1$ $b = -1$ $c = 0$

$(-1)^2 - 4 \times 1 \times 0$

$1 - 0 = 1$

◆ $h(x) = -x^2 + 3$

$a = -1$ $b = 0$ $c = 3$

$\Delta = 0^2 - 4 \times (-1) \times 3$

$\Delta = 0 + 4 \times 3$

$\Delta = 12$

◆ $i(x) = (2x+5)(-x+4)$

$-2x^2 + 8x - 5x + 20$

$-2x^2 + 3x + 20$

$a = -2$ $b = 3$ $c = 20$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 20$

$\Delta = 9 + 8 \times 20 = 9 + 160 = 169$

Remarque : En utilisant la forme canonique on obtient :

On a trouvé $f(x) = a\left[\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

$f(x) = a\left[(x-\alpha)^2 - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}^2\right] = a\left[\left(x - \frac{-b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\left(x - \frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\right]$

Propriété

Soit f une fonction polynôme du deuxième degré définie sur IR par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors

- Si $\Delta = 0$: $f(x) = a(x-\alpha)^2$
- Si $\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

☑ *Savoir faire : Savoir factoriser une expression du second degré :*

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^2 + x - 6$.

$a = 1$ $b = 1$ $c = -6$ $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times -6$ $\Delta = 1 + 24 = 25$ $\Delta > 0$ donc f peut se factoriser

$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2 \times 1} = -3$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2 \times 1} = 2$

Application aux équations du second degré.

Donc $f(x) = (x-2)(x+3)$

Propriété

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: l'équation (E) : $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution
- Si $\Delta = 0$: l'équation (E) : $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ a une solution qui est $\frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$: l'équation (E) : $f(x) = ax^2 + bx + c$ a deux solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

☑ *Savoir faire : Savoir résoudre toutes les équations du second degré :*

◆ (E_1) : $x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6)$

$= 1 - 4 \times -6$

$= 1 + 24 = 25$

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

$x_2 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$x_1 = -3$ $x_2 = 2$

◆ (E_2) : $-2x^2 - 4x + 30 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-2) \times 30$

$\Delta = 16 + 8 \times 30 = 240 + 16$

$= 256$

$x_1 = \frac{4 - \sqrt{256}}{2 \times -2} = \frac{4-16}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$

$x_2 = \frac{4 + \sqrt{256}}{2 \times -2} = \frac{4+16}{-4} = \frac{20}{-4} = -5$

$x_1 = 3$ $x_2 = -5$

◆ (E_3) : $-x^2 + 3x - 5 = 0$

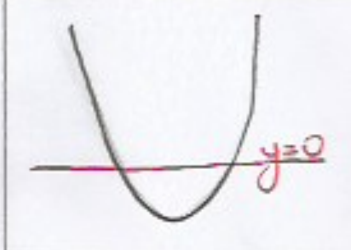
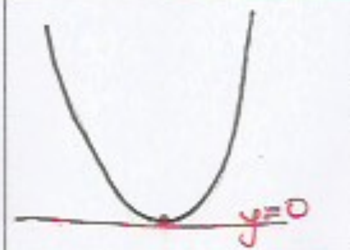
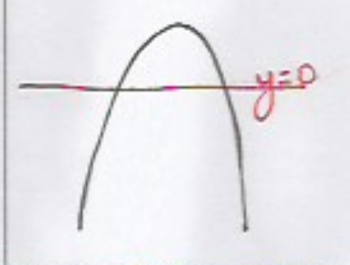
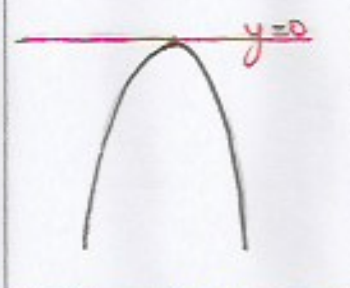
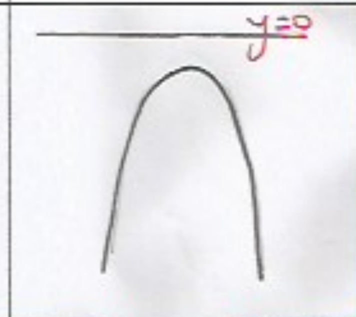
$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-5)$

$\Delta = 9 + 4 \times (-5) = 9 - 20 = -11$

pas de solution

$S(E_3) = \emptyset$

V. Signes d'une fonction polynôme du second degré.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ $f(x)=0$ a 2 solutions	$f(x) = a(x-x_1)^2$ $f(x)=0$ a une solution	$f(x) =$ ne se factorise pas car $\Delta<0$ $f(x)=0$ n'a pas de solution.
$a < 0$			

☑ *Savoir faire : Savoir résoudre les inéquations du second degré graphiquement :*

1) Résoudre les inéquations suivantes :

◆ $(I_1) : x^2 + x - 6 > 0$

$\Delta = 25 > 0$ Donc l'équation à 2 solutions
$S(E_1) : \{-3 ; 2\}$

$a>0$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
Signe de x^2+x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S(I_1) :]-\infty ; -3[\cup]2 ; +\infty[$

◆ $(I_2) : -2x^2 - 4x + 30 \leq 0$

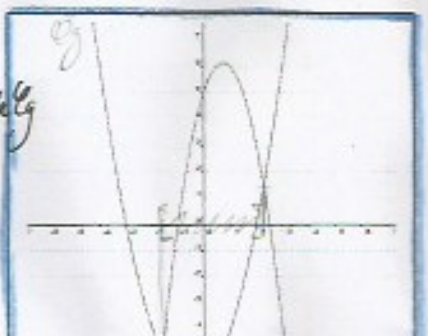
$\Delta = 256 > 0$ Donc l'équation E_2 a 2 solutions
$S(E_2) : \{-5 ; 3\}$

$a<0$

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
Signe de $-2x^2-4x+30$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S(I_2) :]-\infty ; -5] \cup [3 ; +\infty[$

2) Soit f et g les fonctions définie sur IR par
$f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ et $g(x) = x^2 + x - 6$.



L'objectif est de déterminer quand est-ce que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$

($\mathscr{C}_f$ au dessus de $\mathscr{C}_g$) $\Leftrightarrow$ ($f(x) \geq g(x)$) $\Leftrightarrow -2x^2+3x+5 \geq x^2+x-6$
$\Leftrightarrow -3x^2+2x+11 \geq 0$

On pose $(E_1) : -3x^2+2x+11=0$

$\Delta = b^2 - 4ac = -2^2 - 4 \times (-3) \times 11 = 4 + 12 \times 11 = 4 + 132 = 136$

$\Delta > 0$ Donc E_1 a 2 solutions

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{136}}{2\times -3} = \frac{-2-\sqrt{136}}{-6}$ $\frac{-1-\sqrt{136}}{-3}$

$x_2 = \frac{-2+\sqrt{136}}{2\times -3} = \frac{-2+\sqrt{136}}{-6} = \frac{-1+\sqrt{135}}{-6}$ $S(E_1) : \left\{\frac{-1-\sqrt{136}}{-3} ; \frac{-1+\sqrt{136}}{-3}\right\}$

$S(I_1) : \left[\frac{-1-\sqrt{136}}{-3} ; \frac{-1+\sqrt{136}}{-3}\right]$