

Nombres complexes : Part1.

I. L'ensemble $\mathbb{C}$.

Définition

Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes tel que :

- ☺ $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- ☺ Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre i tel que $i^2 = -1$.
- ☺ Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a+bi$ avec a et b réels.

Exemples : $z_1 = 3+4i$; $z_2 = -2-i$; $z_3 = i$; $z_4 = -3$ sont des nombres complexes.

Vocabulaire :

- ☺ L'écriture $z=a+bi$ d'un nombre complexe est appelée la forme algébrique de z .
- ☺ Le nombre a s'appelle la partie réelle du nombre complexe z et on le note $a = \text{Re}(z)$.
- ☺ Le nombre b s'appelle la partie imaginaire du nombre complexe z et on le note $b = \text{Im}(z)$.

Exemples : $z = -2i-3$

Remarque :

- Si $b = 0$ alors on dit que z est un nombre réel.
- Si $a = 0$ alors on dit que z est un nombre imaginaire pur.

Propriété

- ☺ On prolonge les opérations des nombres réels pour les nombres complexes.
- ☺ Les opérations dans $\mathbb{C}$ qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.

☑ Savoir-faire : Savoir effectuer des calculs sur les nombres complexes.

Calculer et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$$z_1 = 3-5i-(3i-4) \quad z_2 = (3-2i)(-1+5i) \quad z_3 = (2-3i)^2 \quad z_4 = (2i)^{13} \quad z_5 = \frac{1}{4-2i} \quad z_6 = \frac{1+i}{2-i}$$

Propriété

- a) Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
- b) Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Démonstration : Conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique.

Exemple d'application : Déterminons le nombre complexe z vérifiant $2z - 5 = 4i + z$. On a donc :

II. Conjugué d'un nombre complexe.

Définition

Soit un nombre complexe $z = a+bi$.

On appelle nombre complexe conjugué de z , le nombre $\bar{z} = a-ib$.

Exemples :

Propriété

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes et n entier naturel non nul.

$$\odot \quad \overline{\bar{z}_1} = z_1 \quad \odot \quad \overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \odot \quad \overline{(z_1 \times z_2)} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2 \quad \odot \quad \overline{(z_1)^n} = \bar{z}_1^n \quad \odot \quad \text{si } z_2 \neq 0, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

Démonstrations :

Application : si z_0 est solution d'une équation à coefficient réel alors $\bar{z}_0$ aussi.

z_0 est solution de (E): $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b, c réel, alors $az_0^2 + bz_0 + c = 0$ donc $a\bar{z}_0^2 + b\bar{z}_0 + c = 0$ donc $\bar{z}_0$ est aussi solution de (E).

Propriété

♣ $z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ est un nombre réel

♣ $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z$ est un nombre imaginaire.

Démonstration :

Propriété

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Démonstration :

III. Module d'un nombre complexe.

Définition

Soit un nombre complexe $z = a + bi$.

On appelle module de z , le nombre réel positif, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemples :

Propriété

Soit z un nombre complexe : $\odot |z|^2 = z\bar{z}$ $\odot |\bar{z}| = |z|$ $\odot |-z| = |z|$

Propriété ROC

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes et n entier naturel non nul.

$$\odot |z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$$

$$\odot |z_1^n| = |z_1|^n$$

$$\odot \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Démonstrations :

IV. Equations du second degré dans $\mathbb{C}$.

Définition

Soit a, b et c des réels avec $a \neq 0$.

On appelle discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$, le nombre réel, noté Δ , égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété

- Si $\Delta > 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta = 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a une unique solution réelle : $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstrations :

☒ Savoir-faire : Savoir résoudre une équation dans $\mathbb{C}$:

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : a) $z^2 + 5 = 0$

b) $z^2 + 3z + 4 = 0$

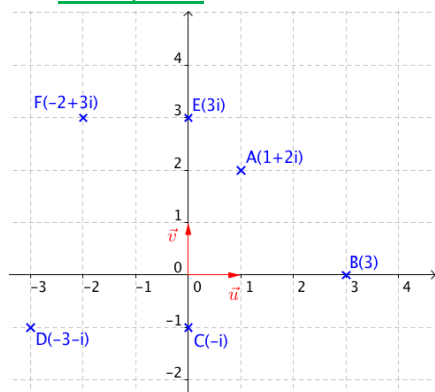
V. Représentation dans le plan complexe.

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Définition

A tout nombre complexe $z = a + bi$, on peut faire correspondre un unique point M de coordonnées $(a; b)$. On dit que z est l'affiche du point M. On note $M(z)$.

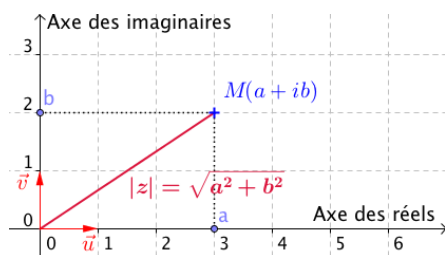
Exemples :



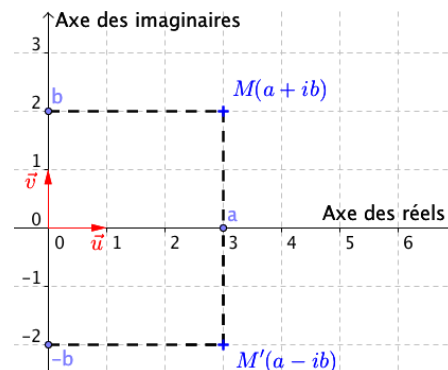
Le point $F(-2; 3)$ a pour affiche le nombre complexe $z = -2 + 3i$.

Tout point appartenant à l'axe des abscisses a pour affiche un nombre On appelle l'axe des abscisses, l'axe des
 Tout point appartenant à l'axe des ordonnées a pour affiche un nombre On appelle l'axe des ordonnées l'axe des

Propriétés graphiques :



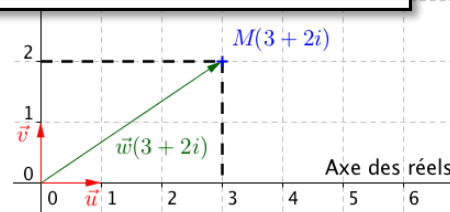
- ☺ Les points d'affixes z et $-z$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
- ☺ Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
- ☺ Dans un repère orthonormé $|z| = OM$



Définition

On appelle affiche d'un vecteur $\vec{w} (a; b)$ le nombre complexe $z = a + bi$.

Exemples :



Propriété

Soit $M(z_M)$ et $N(z_N)$ deux points du plan, $\vec{w}(z)$ et $\vec{w}'(z')$ sont deux vecteurs du plan.

- ☺ Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour affiche $z_M - z_N$
- ☺ Le vecteur $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affiche $z + z'$.
- ☺ Le vecteur $k \vec{u}$, k réel, a pour affiche kz .

Démonstration :