

Nombres complexes part 2.

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

I. Repérer un point du plan par une distance et un angle.



Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on peut repérer un point M par :

☺ La distance OM.

☺ L'angle orienté $(\vec{i}; \widehat{OM})$.

.....

.....

.....

.....

II. Argument d'un nombre complexe.

Définition

Soit un point M d'affixe z non nulle.

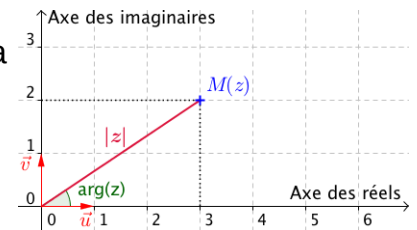
On appelle argument de z , notée $\arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{i}; \widehat{OM})$.

Remarque :

☺ Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

☺ 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(\vec{i}; \widehat{OM})$ n'est pas défini.

Exemple : Soit $z = 3 + 3i$



Propriété

Soit z un nombre complexe non nul.

☺ z est un nombre réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0 + 2k\pi$

☺ z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

☺ $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

☺ $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$

.....

.....

III. Forme trigonométrique d'un nombre complexe.

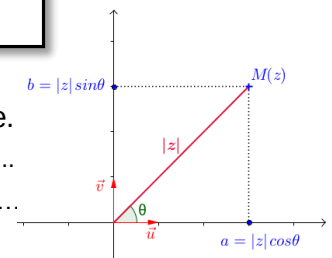
Définition

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe non nul. On pose : $\theta = \arg(z)$

On a alors : $a = |z|\cos(\theta)$ et $b = |z|\sin(\theta)$.

Remarque :

☺ $\frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1, donc il appartient au cercle trigonométrique.



.....

.....

Définition

On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta = \arg(z)$.

Exemple: Ecrire un nombre complexe sous sa forme trigonométrique.

Ecrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous sa forme trigonométrique.

.....

.....

.....

Propriété ROC

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes et n entier naturel non nul.

$$\odot \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad \odot \arg(z_1^n) = n \arg(z_1) \quad \odot \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Démonstrations :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III. Forme exponentielle d'un nombre complexe.

1) Définition

Posons $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$.

.....

.....

.....

.....

.....

On retrouve ainsi la même équation fonctionnelle que celle établie pour les exponentielles : $e^\theta e^{\theta'} = e^{\theta+\theta'}$.

Définition

Pour tout réel θ , on pose : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Remarque : $e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ .

Exemples :

.....

.....

.....

.....

.....

Définition

Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous sa forme exponentielle $z = r e^{i\theta}$.

☑ Savoir-faire : Savoir passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement:

1) Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

a) $z_1 = -2i$ b) $z_2 = -5$ c) $z_3 = 2 - 2i$

2) Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

a) $z_3 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $z_4 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) Propriétés

Propriété

Pour tous réels θ et θ' , pour tout entier naturel n non nul,

☺ $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

☺ $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

☺ $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

☺ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{-i(\theta-\theta')}$

☺ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Remarque : La formule $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ s'appelle formule de Moivre.

IV. Applications à la géométrie

Propriété

A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D .

On a : ☺ $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$

☺ $AB = |z_B - z_A|$

☺ $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

☑ Savoir-faire : Savoir utiliser les nombres complexes en géométrie:

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = -2 - i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 2i$.

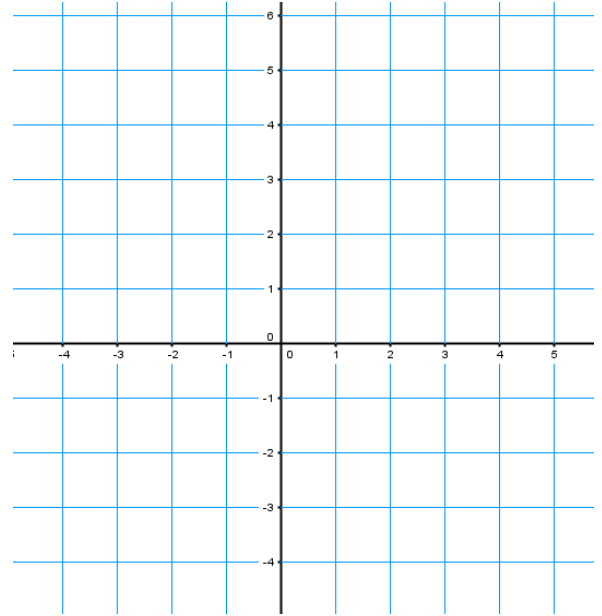
1) Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.

2) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

☑ Savoir-faire : Savoir déterminer un ensemble de points:

Soit M un point d'affixe z . Dans chaque cas, déterminer et représenter :

- 1) L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$.
- 2) L'ensemble des points M tels que $|z - i| = |z - 3|$.
- 3) L'ensemble des points M tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{4} [\pi]$.



☒ **Baccalauréat Métropole 22 juin 2015**

EXERCICE 3

5 POINTS

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.
- a. Calculer le module et un argument du nombre a .
 - b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b .
 - c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle ce de centre O dont on déterminera le rayon.
 - d. Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2. d. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A' , B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.
- Montrer que $b' = 8$.
 - Calculer le module et un argument du nombre a' .

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\frac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n-m|$.
- a. On note r , s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.
Calculer r et s . On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$.
- b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST? Justifier ce résultat.*